Л. М. ЛИХТАРНИКОВ

ЗАДАЧИ МУДРЕЦОВ

Книга для учащихся

МОСКВА «ПРОСВЕЩЕНИЕ» — АО «УЧЕБНАЯ ЛИТЕРАТУРА» 1996

УДК 087.5
ББК 22.1
Л65

Рецензенты:

кандидат педагогических наук, доцент *Б. А. Кордемский;*
методист кабинета математики МГИПКРО *Л. Б. Крайнева*

Лихтарников Л. М.
Л65 Задачи мудрецов: Кн. для учащихся.— М.: Просвещение: АО «Учеб. лит.», 1996.— 112 с.: ил.— ISBN 5-09-006577-2.

В книге юные читатели знакомятся с различными логическими задачами по математике. Автор предлагает интересные и занимательные сюжеты: задачи о мушкетерах, героях сказок, пришельцах и аборигенах и др. Тематика задач также разнообразна. Это турнирные задачи, числовые ребусы, задачи о лгунах, игровые задачи. Ко всем задачам даны решения. Книга для учащихся III — IX классов.

Л $\frac{4306020000-436}{103(03)-96}$ Уточн. план выпуска 1995 г., № 141 ББК 22.1

Учебное издание

Лихтарников Леонид Моисеевич

ЗАДАЧИ МУДРЕЦОВ

Зав. редакцией *Т. А. Бурмистрова*
Редактор *Т. Ю. Акимова*
Младший редактор *Н. Е. Терехина*
Художник *Н. Ф. Конезеева*
Художественный редактор *Е. Р. Дащук*
Технические редакторы *Л. В. Марухно, Л. М. Абрамова*
Корректоры *Н. В. Белозерова, А. А. Баринова*

ИБ № 16007

Сдано в набор 21.06.95. Изд. лиц. № 010001 от 10.10.91. Подписано к печати 15.03.96. Формат $60 \times 90^1/_{16}$. Бумага офсетная № 1. Гарнитура литературная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 7. Усл. кр.-отт. 29. Уч.-изд. л. 6,49. Тираж 40 000 экз. Заказ № 1260.

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Просвещение» Комитета Российской Федерации по печати. 127521, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

АО «Учебная литература». 117571, Москва, проспект Вернадского, 88. Московский педагогический государственный университет.

Саратовский ордена Трудового Красного Знамени полиграфический комбинат Комитета Российской Федерации по печати. 410004, Саратов, ул. Чернышевского, 59.

ISBN 5-09-006577-2

Посвящается памяти моих друзей-одноклассников, окончивших 9-ю среднюю школу г. Иркутска в 1941 году:

Антропову Николаю,
Брытину Владимиру,
Вязникову Борису,
Давыдову Илье,
Мясникову Геннадию,
Пуляевскому Павлу,
Розенфарбу Давиду,
Хромовских Василию,

погибших в боях с немецким фашизмом в годы Великой Отечественной войны.

Автор

Дорогие ребята!

Едва ли среди учеников, окончивших начальную школу, найдется хотя бы один, кто не занимался переправой через реку волка, козы и капусты, кто не разгадывал числовых ребусов и не решал других занимательных задач, которые требуют смекалки, умения рассуждать и проявлять в определенной степени мудрость.

Перед вами книга, в которой собраны именно такие задачи. Их принято называть логическими. Среди математических задач логические задачи занимают особое место.

Во-первых, они отличаются от большинства математических задач тем, что для их решения часто не требуется запас каких-либо специальных математических знаний, а нужна, как правило, сообразительность.

Во-вторых, решение логических задач в некоторой мере напоминает решение научной проблемы. Решая научную проблему, исследователь обычно имеет какое-то количество фактов, по которым он не может сделать определенного заключения. В связи с этим исследователь выдвигает гипотезы и проверяет их справедливость, сопоставляя с имеющимися фактами. Если при этом выдвинутая гипотеза приходит к противоречию с имеющимися фактами, то она отбрасывается как неверная. Если в результате таких исследований удается прийти к заключению, которое согласуется с исходными данными, то выясняется, является ли найденное решение единственным.

Почти так же приходится вести поиск решения логической задачи. Поэтому навыки в решении логических задач будут полезными каждому из вас независимо от того, какую специальность вы выберете после окончания школы.

Среди широко известных логических задач можно выделить несколько классов задач, которые решаются с помощью определенных приемов. В связи с этим в нашей книге выделены следующие главы:

1. Задачи на соответствие и исключение неверных вариантов.
2. Задачи на упорядочивание множеств.
3. Турнирные задачи.
4. Числовые ребусы.
5. Задачи о лгунах.
6. Игровые логические задачи.
7. Игры мудрецов.

Последней в книгу включена глава из различных задач, которые трудно отнести к какому-либо из перечисленных выше классов.

Задачи каждой главы анализируются, и для них указываются способы решения, которые иллюстрируются достаточным числом примеров.

Каждая указанная в книге задача нумеруется двумя цифрами. Первая цифра указывает номер раздела, в котором помещена эта задача, а вторая цифра указывает номер задачи в данном разделе. Задачи, доступные младшим школьникам, отмечены звездочкой *.

В конце книги приведены ответы к помещенным в ней задачам.

Так как логика рассуждения при решении абсолютного большинства задач достаточно сложна и часто носит индивидуальный характер, то почти во всех случаях вместе с ответом к задаче приводится или подробное ее решение, или достаточно четкое указание о пути решения задачи.

Однако мы надеемся, что читатель будет обращаться к этим решениям или в случае, когда задача им решена, или после многократных, но не успешных попыток самостоятельно решить задачу.

Следует заметить, что для решения почти каждой логической задачи, как правило, существует несколько различных путей и поэтому реальной является возможность найти решение лучше того, которое приведено в книге.

Значительная часть рассматриваемых задач заимствована из различных источников, в первую очередь из журналов «Квант» и «Наука и жизнь», из книг [1], [4], [5], [6], [7]. Часть задач составлена автором.

Многие логические задачи связаны с рассмотрением нескольких конечных множеств, между элементами которых имеются некоторые зависимости.

Наиболее простым является случай, когда даны два множества с одинаковым числом элементов и требуется установить взаимно однозначное соответствие между ними.

В более сложных случаях рассматривается три или большее число множеств, число элементов у которых одинаково и требуется установить взаимно однозначное соответствие между элементами каждой пары множеств. И наконец, рассматривается несколько конечных множеств, между элементами которых имеются зависимости, но нет взаимно однозначного соответствия.

Решению всех перечисленных классов задач помогает использование различного рода таблиц и графиков. В случае двух множеств с одинаковым числом элементов удобно пользоваться квадратной таблицей, состоящей из $n \times n$ клеток (n — число элементов в множестве). Данные задачи вносятся в соответствующие клетки таблицы, например положительный результат знаком «+», а отрицательный — знаком «—». После использования всех условий задачи клетки, оставшиеся пустыми, заполняются знаком «+» или «—» путем логических рассуждений.

Если множеств более двух, то приходится рассматривать несколько квадратных таблиц или одну прямоугольную таблицу, состоящую из $n \times m$ клеток.

В этой таблице $n \times m$, будем в дальнейшем в некоторых случаях для упрощения решения обозначать клетки таблицы буквами L_{ij}, где i — номер столбца таблицы, а j — номер ее строки.

✲ Задача 1.1.

Беседуют трое: Белокуров, Чернов и Рыжов. Брюнет сказал Белокурову: «Любопытно, что один из нас русый, другой — брюнет, а третий — рыжий, но ни у кого цвет волос не соответствует фамилии». Какой цвет волос имеет каждый из беседующих?

Решение задачи 1.1. Для решения задачи воспользуемся таблицей 3×3. По условию задачи Белокуров не русый, Чернов не брюнет, и Рыжов не рыжий. Это позволяет поставить знак «—» в соответствующих клетках. Кроме того, по условию Белокуров не брюнет, и, значит, в клетке на пересечении строки «Белокуров» и столбца «Черный» также нужно поставить знак «—».

Цвет волос / Фамилия	Рыжий	Черный	Русый
Белокуров		—	—
Чернов		—	
Рыжов	—		

Из таблицы следует, что Белокуров может быть только рыжим. Поставим знак плюс в соответствующей клетке. Отсюда видно, что Чернов не рыжий. Обозначим это знаком минус в таблице. Теперь ясно, что Чернов может быть только русым, а Рыжов — брюнетом.

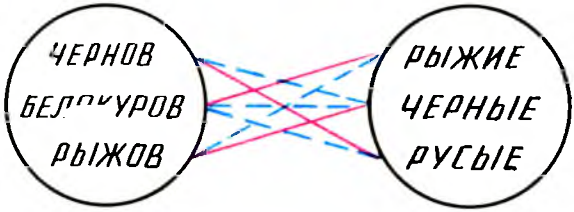
Цвет волос / Фамилия	Рыжий	Черный	Русый
Белокуров	+	—	—
Чернов	—	—	+
Рыжов	—	+	—

Использование таблицы помогло наглядно оформить решение задачи. Также этот ход решения можно представить графически.

Будем изображать элементы каждого из множеств точками на плоскости. Если по условию задачи между элементами этих множеств имеет место взаимно однозначное соответствие, то будем соединять сплошной линией те элементы множеств, которые находятся во взаимно однозначном соответствии, и пунктирной линией, если такого соответствия нет.

Используя условие задачи, мы можем получить на графике наглядное изображение исходных данных, а далее путем логических рассуждений установить необходимое взаимно однозначное соответствие между остальными элементами этих множеств.

Проиллюстрируем этот способ на примере задачи 1.1. Изобразим здесь графически два множества (множество фамилий и множество цветов волос).



Используя условие задачи, соединим пунктирными линиями следующие пары элементов: Чернов — черные, Белокуров — русые, Рыжов — рыжие и Белокуров — черные. После этого, очевидно, надо соединить сплошными линиями последовательно следующие пары элементов: Белокуров — рыжие, Чернов — русые, Рыжов — черные.

✻ Задача 1.2.

В бутылке, стакане, кувшине и банке находятся молоко, лимонад, квас и вода. Известно, что:

1) вода и молоко не в бутылке;
2) сосуд с лимонадом стоит между кувшином и сосудом с квасом;
3) в банке не лимонад и не вода;
4) стакан стоит около банки и сосуда с молоком.

Куда налита каждая жидкость?

Задача 1.3.

Четверо владельцев лодок решили провести гонки из четырех заездов, меняясь в каждом заезде лодками.

1) В первом заезде Борис был на лодке Виктора, а во втором Виктор — на лодке Олега.
2) Петр выиграл третий заезд на своей лодке «Мотылек», причем он выиграл и все остальные заезды.
3) На «Колибри» во втором заезде плыл Олег, а в четвертом заезде плыл Борис.
4) В четвертом заезде лодка «Колибри» пришла второй после «Стрижа».

Кому принадлежала лодка «Шмель»?

✲ Задача 1.4.

Три подруги вышли погулять в белом, зеленом и синем платьях и в туфлях таких же цветов. Известно, что только у Ани цвет платья и цвет туфель совпадают. Ни туфли, ни платье Вали не были белыми. Наташа была в зеленых туфлях. Определите цвет платья и туфель на каждой из подруг.

Решение задачи 1.4. Для решения воспользуемся таблицей 6×3.

Имя	Цвет туфель			Цвет платья		
	белый	зеленый	синий	белый	зеленый	синий
Аня	+	—	—	+	—	—
Валя	—	—	+	—	+	—
Наташа	—	+	—	—	—	+

Так как Наташа была в зеленых туфлях, то обозначим это знаком плюс в таблице и пометим, что туфли у нее не могут быть белыми и синими. У Ани и Вали в столбце «Цвет туфель зеленый» ставим минус. Так как ни туфли, ни платье Вали не были белыми, то в соответствующих клетках ставим знак минус. Теперь видно, что у Ани туфли белые, а у Вали — синие. Так мы установили цвета туфель девочек. При этом, учитывая условие задачи, мы делаем вывод, что у Ани платье белое, у Вали платье не синее, а у Наташи платье не зеленое. Следовательно, у Вали платье зеленое, а у Наташи — синее.

Задача 1.5.

Три студента: Андреев, Борисов и Воронов — учатся на различных факультетах Новгородского педагогического института (историческом, физико-математическом и иностранных языков). Все они приехали из различных городов: Таллинна, Твери, Вышнего Волочка, причем один из них увлекается футболом, другой — баскетболом, третий — волейболом.

Известно, что:

1) Андреев не из Вышнего Волочка, а Борисов не из Твери;

2) студент, приехавший из Вышнего Волочка, учится не на историческом факультете;

3) тверянин учится на факультете иностранных языков и увлекается футболом;

4) Воронов учится на историческом факультете;

5) студент физико-математического факультета не любит волейбол.

Из какого города приехал каждый студент, на каком факультете он учится и каким видом спорта увлекается?

Задача 1.6.

Маша, Люда, Женя и Катя умеют играть на различных инструментах (виолончели, рояле, гитаре и скрипке), но каждая только на одном. Они же владеют различными иностранными языками (английским, французским, немецким и испанским), но каждая только одним. Известно, что:

1) девушка, которая играет на гитаре, говорит по-испански;
2) Люда не играет ни на скрипке, ни на виолончели и не знает английского языка;
3) Маша не играет ни на скрипке, ни на виолончели и не знает английского языка;
4) Женя знает французский язык, но не играет на скрипке.

Кто на каком инструменте играет и какой иностранный язык знает? Найдите оба решения задачи.

Задача 1.7.

В течение последних четырех лет инженеры Еремин, Фомин, Дементьев и Барклая получают очередные отпуска в мае, июне, июле и августе. Причем если один из них отдыхает в мае, то другой — в июне, третий — в июле, а четвертый — в августе. Каждый из них получал отпуск в разное время.

Так, в первый год Дементьев отдыхал в июле, во второй год Дементьев отдыхал в августе, а Еремин — в мае. На третий год

Барклая отдыхал в июне, а Фомин на четвертый год — в июле. Требуется узнать время отдыха каждого инженера в каждом году.

Задача 1.8.

Как-то раз судьба свела в одно купе известного историка, поэта, прозаика и драматурга. Это были Алексеев, Борисов, Константинов, Дмитриев. Когда поезд тронулся, они углубились в чтение. Оказалось, что каждый из них взял с собой книгу, написанную одним из пассажиров купе. Алексеев и Борисов, дочитав каждый свою книгу, условились на завтра обменяться ими. На следующий день поэт читал пьесу. Прозаик, очень молодой человек, выпустивший свою первую книгу, говорил, что он в жизни не читал и не читает ничего по истории. Историк Борисов читал произведение Дмитриева. И, конечно, никто из пассажиров не читал книгу, написанную им самим.

Что читал каждый из пассажиров? Каковы профессии каждого из спутников?

Рассмотрим задачу, в которой между множествами нет взаимно однозначного соответствия.

Задача 1.9.

На международном конгрессе встретились четверо ученых: физик, историк, биолог и математик. Национальности их были различные, и, хотя каждый из ученых владел двумя языками из четырех (русский, английский, французский, итальянский), не было такого языка, на котором они могли бы разговаривать вчетвером.

Был язык, на котором могли разговаривать сразу трое. Никто из ученых не владел французским и русским языками одновременно. Хотя физик не говорил по-английски, он мог быть переводчиком, если биолог и историк захотели бы поговорить друг с другом. Историк говорил по-русски и мог говорить с математиком, хотя тот не знал ни одного русского слова. Физик, биолог и математик не могли беседовать втроем на одном языке. Какими двумя языками владел каждый из ученых?

Задача 1.10.

Однажды известный герой узбекских сказок Ходжа Насреддин стал свидетелем разговора четырех мужчин. Они говорили между собой на нескольких языках, и часто один переводил другому сказанное третьим.

Вскоре Ходже стало ясно, как зовут каждого из четырех. Он заметил также, что не было языка, который был бы известен всем четырем, но каждый знал два языка. В ходу же были армянский, персидский, греческий и турецкий языки.

Самый младший из четырех, Салал, не знал персидского языка, но был переводчиком, когда старый перс Абдул хотел объясниться с Мохаммедом. Пришелец с Босфора, Мохаммед, хорошо говорил на своем родном, турецком языке и свободно разговаривал с Юсуфом, хотя тот не понимал по-турецки ни слова.

Ни Салал, ни Абдул, ни Юсуф не знали такого языка, на котором могли бы объясняться все трое между собой. Среди этих людей не было и такого, который одновременно владел бы турецким и армянским языками.

И только один Ходжа Насреддин великолепно понимал каждого из них. Какими языками владел каждый?

Следующие две задачи были в разное время опубликованы в журнале «Наука и жизнь». Большое количество множеств, участвующих в условиях задачи с большим числом элементов, делает задачи труднообозримыми и поэтому сложными для решения.

Задача 1.11. Где живет зебра и кто пьет воду?

Необходимые данные для решения этого вопроса можно получить из следующих 15 утверждений:

1. В ряд стоят 5 домов.
2. Англичанин живет в красном доме.
3. У испанца немецкая овчарка.
4. Кофе пьют в зеленом доме.
5. Австриец пьет водку.
6. Зеленый дом стоит справа от белого.
7. Тот, кто курит сигареты «Золотое руно», разводит улиток.
8. В оранжевом доме курят сигареты «Спорт».
9. Молоко пьют в среднем доме.
10. Норвежец живет в первом доме.
11. Мужчина, который курит сигареты «Прима», живет в доме, стоящем рядом с домом владельца лисы.
12. Сигареты «Спорт» курят в доме, рядом с которым живет владелец лошади.
13. Курящий сигареты «Столичные» пьет апельсиновый сок.
14. Японец курит сигареты «Кент».
15. Норвежец живет рядом с голубым домом.

Кроме того, следует сказать, что все пять домов окрашены в разные цвета. Жильцы этих домов разных национальностей, они пьют разные напитки, содержат разных животных и курят разные сигареты.

Где живет зебра? Кто пьет воду?

Задача 1.12. Дуэль мушкетеров.

— Ваше преосвященство,— докладывал Рошфор,— вчера вечером я оказался в Сен-Клу около харчевни «Голубой павлин». Вскоре вслед за мной подъехала целая кавалькада мушкетеров со слугами. Я не знаю никого из них, но расслышал несколько произнесенных ими титулов и имен и разглядел некоторые гербы и эмблемы, украшающие шляпы, или одежду слуг, или лошадиную сбрую.

Посетителей в «Голубом павлине» было немного, и мушкетеры расселись по двое к отдельным столикам. Мушкетер с эмблемой медведя сидел с неким графом, некий д'Эстрэ — с мушкетером, к которому все обращались как к герцогу, а некий Ла Кост — с мушкетером, герб которого, как видно, не зря содержал разъяренного вепря: вскоре вспыхнула ссора.

Перебранка закончилась дуэлью на весьма суровых условиях: каждому предстояло поочередно сразиться со всеми, кроме, разумеется, своего застольного друга. Здесь же, на улице, около «Голубого павлина» мушкетер с геральдическим львом скрестил шпагу с упомянутым графом; какой-то шевалье — с тем, кого он именовал Монтераном, а Бюзаньи — с мушкетером, имеющим в гербе оленя. Схватка закончилась незначительными царапинами. Тут появился гвардейский патруль и вся компания так проворно вскочила в седла, что я едва поспел за ними. Мы проскакали до монастыря Дешо, и там, на пустыре, возобновился бой, причем теперь каждый сменил своего визави: мушкетер с эмблемой волка дрался с неким Вьевилем; какой-то виконт — с Пьютанжем, а мушкетер с геральдическим вепрем — против маркиза.

— Погодите, Рошфор! — прервал его кардинал.— Ваши сведения никуда не годятся, такой доклад невозможно преподнести королю. Кто скрывается под гербами? Кто такие эти граф, виконт, герцог? Мне нужны только точные данные. Но рассказывайте дальше, чем закончилась схватка у монастыря.

— Тяжело были ранены двое, монсеньор,— ответил Рошфор.— Раненых унесли в монастырь, а сражение разгорелось с еще большим ожесточением, возможно, потому, что вновь произошла смена противников. Все закончилось тем, что мушкетер с эмблемой лисицы выбил шпагу у барона, а с гербом медведя загнал д'Эстрэ в угол, после чего произошло примирение.

— Рошфор! Стойте! Так у Вас же превосходные данные. Мне ясно, у кого какие эмблемы и титулы! Я немедленно иду к королю! — произнес кардинал.— На этот раз капитан мушкетеров де Тревиль не отвертится — ему не удастся.

А Рошфор, втайне обрадованный сменой настроения своего повелителя, не сразу смог уяснить, каким образом из отрывочных сведений можно было воссоздать что-то цельное. Он взглянул на листок, на котором кардинал начертал имя, титул и герб каждого из шести мушкетеров, и ему показалось, что, быть может, Его преосвященство и в самом деле обладал прозорливостью.

Может ли кардинал сделать объективный доклад королю?

Слово «порядок» часто употребляют и в обыденной речи и в математике. Мы говорим о порядке слов в предложении, о порядке выполнения действий в задаче, о порядковом номере дома на некоторой улице. При этом в слово «порядок» вкладывают такой смысл: оно означает, какой элемент того или иного множества за каким следует (или какой элемент какому предшествует).

Если для элементов некоторого множества M установлен порядок его элементов, то говорят, что множество M упорядочено. Ясно, что если множество M состоит из конечного числа элементов и упорядочено, то все элементы можно занумеровать и изобразить точками числовой прямой, расположенными в определенном порядке.

Рассмотрим класс логических задач с конечными множествами, решения которых приводят к необходимости упорядочить эти множества.

✲ Задача 2.1.

В очереди за билетами в кино стоят Юра, Миша, Володя, Саша и Олег. Известно, что:

1) Юра купит билет раньше, чем Миша, но позже Олега;
2) Володя и Олег не стоят рядом;
3) Саша не находится рядом ни с Олегом, ни с Юрой, ни с Володей.

Кто за кем стоит?

Решение задачи 2.1. По условию 1 задачи: в очереди за билетами три мальчика стоят в следующем порядке: Олег, Юра, Миша. Поэтому нужно установить места Саши и Володи в очереди. Но по условию 3 Саша не находится рядом ни с Олегом, ни с Юрой, ни с Володей. Это возможно лишь в случае, когда Саша стоит за Мишей, а остальные мальчики стоят перед Мишей. Теперь нужно установить место Володи среди четырех мальчиков, стоящих в порядке: Олег, Юра, Миша, Саша. Так как по условию 2 Володя не может стоять ни перед Олегом, ни после него, а по условию 3 он не может стоять ни перед Сашей, ни после него, то единственным местом, где может стоять Володя, является место между Юрой и Мишей. Таким образом, мальчики стоят в очереди в следующем порядке: Олег, Юра, Володя, Миша, Саша.

✲ Задача 2.2.

При построении восемь мальчиков разместились так, что:

1) А был впереди Б и В;
2) Б — впереди К через одного;
3) Л — впереди А, но после Д;
4) В — после Е через одного;
5) Д — между Б и Г;
6) Е — рядом с К, но впереди В.

В каком порядке выстроились мальчики?

✲ Задача 2.3.

Волейбольные команды А, Б, В, Г, Д и Е разыгрывали первенство. Известно, что команда А отстала от Б на три места, команда В оказалась между Г и Д, команда Е опередила Б, но отстала от Д. Какое место заняла каждая из команд?

✻ Задача 2.4.

В семье четверо детей. Им 5, 8, 13, 15 лет. Детей зовут Аня, Боря, Вера и Галя. Сколько лет каждому ребенку, если одна девочка ходит в детский сад, Аня старше Бори и сумма лет Ани и Веры делится на три?

Задача 2.5.

Леня, Дима, Коля и Алик подсчитывали после рыбной ловли свои трофеи. В результате выяснилось следующее.

Алик поймал больше, чем Коля. Леня и Дима вместе поймали рыбы столько же, сколько поймали Коля и Алик. Леня и Алик вместе поймали меньше рыбы, чем Дима и Коля.

Какие места занял каждый по улову рыбы?

✻ Задача 2.6.

Четыре подруги пришли на каток каждая со своим братом. Они разбились на пары и начали кататься. Оказалось, что в каждой паре кавалер выше дамы и никто не катается со своей сестрой. Самый высокий из компании — Юра Воробьев, следующий по росту — Андрей Егоров, потом Люся Егорова, Сережа Петров, Оля Петрова, Дима Крымов, Инна Крымова и Аня Воробьева. Кто с кем катался?

✻ Задача 2.7.

На улице, став в кружок, беседуют четыре девочки: Аня, Валя, Галя и Надя.

1) Девочка в зеленом платье (не Аня и не Валя) стоит между девочкой в голубом платье и Надей.

2) Девочка в белом платье стоит между девочкой в розовом платье и Валей.

Какого цвета платье у каждой из девочек?

Решение задачи 2.7. Будем обозначать места расположения девочек в кружке овалами, занумеровав их по часовой стрелке.

Предположим, что в овале *1* стоит девочка в зеленом платье. Это по условию 1 задачи не Аня, не Валя и не Надя. Значит, в зеленом платье Галя. Но по тому же условию задачи Галя стоит между девочкой в голубом платье и Надей. Не нарушая общности задачи, будем считать, что в овале *4* находится девочка в голубом платье, а в овале *2* стоит Надя. Используем условие 2. Предположим, что в овале *2* девочка в белом платье (это Надя), но тогда в овале *1* должна стоять либо Валя, либо девочка в розовом платье, что противоречит уже доказанному. Значит, девочка в белом платье стоит в овале *3*. При этом девочкой в голубом платье должна быть Валя, а Надя должна быть в розовом платье. Теперь ясно, что Аня в белом платье.

Задача 2.8.

Однажды в Артеке за круглым столом оказалось пятеро ребят родом из Москвы, Иркутска, Тулы, Перми и Курска: Юра, Толя, Леша, Коля, Витя.

Москвич сидит между курянином и Витей, иркутянин — между Юрой и Толей, а напротив него сидят пермяк и Леша. Коля никогда не был в Иркутске, а Юра не бывал в Москве и в Курске, курянин с Толей регулярно переписываются. Определите, кто из ребят где живет.

В ряде логических задач приходится иметь дело с упорядоченными парами. Рассмотрим несколько таких задач.

Задача 2.9.

Как-то раз четыре товарища (Валентин, Николай, Владимир и Алексей) пошли со своими женами на танцы. Во время первого танца каждый из них танцевал не со своей женой. Лена танцевала с Валентином, а Аня — с мужем Наташи. Оля танцевала с мужем Ани, Николай — с женой Владимира, а Владимир — с женой Валентина. Кто на ком женат? Кто с кем танцевал?

Решение задачи 2.9. Валентин не муж Лены (Лена танцевала не со своим мужем), не муж Наташи (Аня танцевала с мужем Наташи), не муж Ани (с мужем Ани танцевала Оля). Значит, *Валентин — муж Оли.*

Так как Владимир танцевал с женой Валентина, то Владимир танцевал с Олей. Но Оля танцевала с мужем Ани. Значит, *Владимир — муж Ани.*

Николай танцевал с женой Владимира. Значит, Николай танцевал с Аней. Но Аня танцевала с мужем Наташи. Значит, *Николай — муж Наташи.*

При этом, очевидно, *Алексей — муж Лены.*

Танцевальными парами были:

Лена — Валентин, Аня — Николай, Оля — Владимир, Наташа — Алексей.

Задача 2.10.

Был жаркий день, и четыре супружеские пары, гуляя, выпили в течение дня 44 стакана лимонада.

Аня выпила 2 стакана, Мария — 3, Софья — 4, Дарья — 5. Андреев выпил столько же, сколько и его жена; Борисов выпил стаканов лимонада вдвое больше, чем его жена; Васильев — втрое больше своей жены, а Груздев выпил стаканов лимонада в четыре раза больше, чем его жена.

Кто на ком женат?

Задача 2.11.

Алексей Иванович, Федор Семенович, Валентин Петрович и Григорий Аркадьевич были как-то раз со своими детьми в парке культуры и отдыха. Они катались на «колесе обозрения». В кабинах «колеса» оказались вместе: Леня с Алексеем

Ивановичем, Андрей с отцом Коли, Тима с отцом Андрея, Федор Семенович с сыном Валентина Петровича, Валентин Петрович с сыном Алексея Ивановича.

Назовите, кто чей сын и кто с кем катался, если ни один из мальчиков не катался со своим отцом.

Здесь рассматривается класс логических задач, связанных с выяснением итогов некоторых турниров. В задачах этого класса обычно приводятся неполные данные об итогах проведенных спортивных встреч и требуется путем логических рассуждений получить полные данные.

Естественно, что в большинстве случаев решению задачи способствует оформление турнирной таблицы по данным, приведенным в условии задачи, а затем по данным, полученным логическим путем.

Конечно, решая задачу о шахматном или футбольном турнире, нужно знать основные положения о таких турнирах.

Так, в шахматных турнирах победитель игры в партии получает одно очко. Ничейный исход оценивается для каждого игрока в 0,5 очка, а проигравшему записывают ноль очков.

В шахматном турнире участники, набравшие одинаковое число очков, делят соответствующие места.

В футбольном (хоккейном) турнире команда — победитель матча получает два очка. Ничейный исход оценивается для каждой команды в одно очко, а поражение — в ноль очков.

При распределении мест в футбольном турнире (хоккейном) в случае равенства очков у двух команд во внимание принимается разница забитых и пропущенных голов.

Учитывая некоторую специфику в каждом виде спорта, задачи этого раздела сгруппированы по видам спорта.

Рассмотрим сначала ряд задач, посвященных шахматным турнирам.

Задача 3.1.

Шахматисты А, Б, В, Г, Д, Е сыграли в турнире между собой по одной партии. А сыграл все партии вничью. Б не проиграл ни одной партии. В выиграл у победителя соревнования и сыграл вничью с Д. Г обогнал Д, но отстал от Е.

Кто сколько очков набрал и какое место занял?

Решение задачи 3.1. Для удобства решения задачи будем заполнять турнирную таблицу, используя данные задачи, сформулированные в явном виде.

Установим победителя турнира. Это не А (по количеству очков), это не Б (он не проиграл ни одной партии), это не В (он выиграл у победителя), это не Г (он отстал от Е), это не Д (его обогнал Г). Следовательно, победителем является Е. И он по условию задачи проиграл В.

Как сыграли Б и Е? Б не выиграл у Е (иначе у Е было бы 2,5 очка и он не мог бы стать победителем). Но по условию задачи Б и не проиграл Е. Значит, они сыграли вничью.

Чтобы Е был победителем, он должен набрать не меньше трех очков (т. е. больше, чем А), но тогда он выиграл у Г и Д.

По условию задачи Б не проиграл ни одной партии. Но тогда у него не меньше 2,5 очков. У него не может быть больше 2,5 очков, иначе он догонит победителя. Значит, у Б 2,5 очка, т. е. он все партии сыграл вничью.

Теперь ясно, что В проиграл Г. В противном случае у него будет больше чем 2,5 очка. Так как Г обогнал Д, то Д не мог выиграть у Г (иначе у Д будет 2,5 очка, а у Г — 2 очка). Но и Г не мог выиграть у Д (иначе он догоняет победителя). Значит, Г и Д сыграли вничью. Запишем все в таблицу.

Игрок	А	Б	В	Г	Д	Е	Очки	Место
А		0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	2,5	II-V
Б	0,5		0,5	0,5	0,5	0,5	2,5	II-V
В	0,5	0,5		0	0,5	1	2,5	II-V
Г	0,5	0,5	1		0,5	0	2,5	II-V
Д	0,5	0,5	0,5	0,5		0	2	VI
Е	0,5	0,5	0	1	1		3	I

Задача 3.2.

В шахматном турнире участвовало 8 человек, и все они набрали разное количество очков. Шахматист, занявший второе место, набрал столько же очков, сколько набрали шахматисты, занявшие четыре последних места вместе.

Как сыграли между собой шахматисты, занявшие третье и седьмое места?

Задача 3.3.

В финальном турнире играли пять шахматистов. А окончил все партии вничью. Б сыграл вничью с занявшими первое и последнее места. В проиграл Б, но зато сыграл вничью только одну партию. Г выиграл у Д и у занявшего четвертое место. Д не выиграл ни одной партии.

Кто сколько очков набрал и какое место занял?

Задача 3.4.

После окончания шахматного турнира в один круг (каждый сыграл друг с другом по одному разу) все пять его участников А, Б, В, Г, Д, перечисленных здесь в порядке занятых мест, обменялись впечатлениями:

— Не думал, что лишь я один не испытаю горечи поражения,— сказал Б.

— А вот мне единственному не удалось одержать ни одной победы,— заметил Д.

Попробуйте по этим данным восстановить турнирную таблицу: как каждый сыграл с остальными участниками?

Задача 3.5.

В розыгрыше первенства по футболу встретились футбольные команды: «Авангард», «Буревестник», «Динамо», «Спартак», «Торпедо». Они сыграли между собой по одному матчу, причем в каждом туре одна из команд была свободна от игры.

В первом туре «Буревестник» проиграл спартаковцам, а во втором выиграл у «Авангарда».

В третьем туре команда «Торпедо» была свободна от игры, одержав перед этим победу и проиграв другую встречу.

В четвертом туре свободен был «Авангард», имевший в своем активе две победы при трех сыгранных матчах, динамовцы к этому времени сумели выиграть только один матч.

Каких результатов добилась каждая из команд в соревнованиях, если встречи четвертого и пятого туров окончились вничью?

Решение задачи 3.5. Установим сначала для каждого тура команды, игравшие в нем и свободные от игры.

Из условия задачи следует, что в первом туре играли команды «Буревестник» — «Спартак» и «Торпедо» — «Авангард» (первая пара прямо названа в условии задачи, а игра второй следует из того, что каждая из этих двух команд была свободна от игры соответственно в третьем и четвертом турах). Следовательно, в первом туре свободной от игры была команда «Динамо».

Во втором туре играли команды «Буревестник» — «Авангард», «Торпедо» — «Динамо» (первая пара прямо названа в условии задачи, а игра второй пары следует из того, что во втором туре команды «Торпедо» и «Динамо» не могли быть свободны от игры). Следовательно, во втором туре свободной от игры была команда «Спартак».

В третьем туре должны были играть следующие команды: «Буревестник», «Динамо», «Авангард» и «Спартак». Команда «Торпедо» по условию задачи была свободна от игры. Но команда «Буревестник» в первом и втором турах уже играла с командами «Спартак» и «Авангард». Следовательно, в третьем туре команда «Буревестник» играла с командой «Динамо», а команда «Авангард» играла с командой «Спартак».

Из условия задачи следует, что в четвертом туре свободной от игры была команда «Авангард». Аналогично рассуждению, проведенному в третьем туре, устанавливается, что в четвертом играли команды: «Буревестник» — «Торпедо», «Динамо» — «Спартак».

И наконец, в пятом туре играли команды «Авангард» — «Динамо» и «Торпедо» — «Спартак», а свободной от игры была команда «Буревестник».

Ничейные результаты встреч в четвертом и пятом турах указаны в условии задачи. Также указано, что в первом туре «Спартак» выиграл у «Буревестника», а во втором туре «Буревестник» выиграл у «Авангарда».

Так как по условию задачи после трех туров команда «Авангард» имела две победы в трех сыгранных матчах, а проиграла она команде «Буревестник» во втором туре, то в первом туре команда «Авангард» выиграла у команды «Торпедо», а в третьем туре она же выиграла у команды «Спартак».

Команда «Торпедо» после двух туров имела одно поражение (как указывалось, от команды «Авангард») и одну победу. Следовательно, она выиграла во втором туре у команды «Динамо».

Динамовцы после третьего тура по условию задачи выиграли только один матч. Но в первом туре команда «Динамо» была свободна от игры, во втором туре она проиграла команде «Торпедо». Следовательно, команда «Динамо» выиграла в третьем туре у команды «Буревестник».

Результаты решения задачи могут быть записаны в следующих таблицах:

Тур	Играли команды	Команда, свободная от игры
1	«Буревестник» — «Спартак» «Торпедо» — «Авангард»	«Динамо»
2	«Буревестник» — «Авангард» «Торпедо» — «Динамо»	«Спартак»
3	«Буревестник» — «Динамо» «Авангард» — «Спартак»	«Торпедо»
4	«Буревестник» — «Торпедо» «Динамо» — «Спартак»	«Авангард»
5	«Авангард» — «Динамо» «Торпедо» — «Спартак»	«Буревестник»

Команда	Авангард	Буревестник	Динамо	Спартак	Торпедо	ОЧКИ	МЕСТО
Авангард		0	1	2	2	5	I
Буревестник	2		0	0	1	3	V
Динамо	1	2		1	0	4	II-IV
Спартак	0	2	1		1	4	II-IV
Торпедо	0	1	2	1		4	II-IV

Задача 3.6.

Победителями футбольного турнира оказались четыре команды: «Динамо», «Спартак», «Труд» и «Шахтер», набравшие одинаковое количество очков.

Между командами-победительницами был организован дополнительный турнир, на котором каждая команда сыграла с каждой по одному матчу.

Команда «Динамо» набрала 5 очков, «Труд» — 3 очка, «Шахтер» — 1 очко. На дополнительном турнире было забито 11 мячей, из которых 5 забили игроки «Труда». Кстати, эта команда победила «Шахтер» со счетом 2:1. Восстановите исход матчей с указанием счета в каждом матче, если известно, что один из матчей закончился со счетом 3:3.

Задача 3.7.

В первенстве города по хоккею с шайбой, которое проводилось по круговой системе (каждая команда сыграла по одному разу с другими командами), участвовали четыре команды: «Север», «Юг», «Восток» и «Запад». Последняя встреча команд окончилась неожиданно: «Север» проиграл «Востоку», но это не помешало «Северу» стать чемпионом, а «Восток» не улучшил своего турнирного положения. Как сыграли между собой «Юг» и «Запад»?

Задача 3.8.

Три футбольные команды провели между собой турнир, состоящий из двух кругов. После турнира таблица результатов игр выглядела так:

№	Команда	Очки	Мячи
1	«Метеор»	6	9:1
2	«Комета»	5	5:1
3	«Ракета»	1	1:13

Определите результаты шести матчей, если один из матчей «Метеор» — «Ракета» закончился со счетом 1:1. Два матча турнира завершились с одинаковым счетом.

Задача 3.9.

Четыре футбольные команды «Старт», «Комета», «Ракета» и «Вымпел» провели каждая с каждой по одному матчу. Судья изготовил таблицу, содержащую результаты их встреч. Машинистка отпечатала таблицу с образца и отдала ее судье. Но старая печатная машинка почти ничего не отпечатала (см. таблицу). Однако судья помнил, что остальные матчи окончились со счетом 2:0, 1:1, 2:2, 3:1, 5:3. Помогите судье заполнить таблицу. В графе «Мячи» слева записывается количество забитых мячей, справа — количество пропущенных.

Команда	Старт	Комета	Ракета	Вымпел	Победы	Ничьи	Поражения	Мячи	Очки
Старт									6
Комета					1:0			2-	
Ракета								-8	
Вымпел			0:1						

Задача 3.10.

В футбольном турнире каждая пара команд должна встретиться между собой один раз. После очередного тура Боря подсчитал, что четное число встреч провели семь команд. После следующего Боря обнаружил, что четное число встреч по-прежнему имели семь команд. Возможно ли такое? Если да, то можно ли определить, сколько команд участвовало в турнире (расписание турнира составлено так, что в каждом туре свободно не более одной команды)?

Задача 3.11.

Недавно я нашел прошлогоднюю таблицу хоккейного турнира между шестыми классами нашей школы. На ней сохранилась лишь небольшая часть записей. Восстановите таблицу.

КЛАСС	$6^{\text{а}}$	$6^{\text{б}}$	$6^{\text{в}}$	$6^{\text{г}}$	ОЧКИ	СЧЕТ	МЕСТО
$6^{\text{а}}$		1:1				:3	
$6^{\text{б}}$					1	:4	
$6^{\text{в}}$						3:1	1
$6^{\text{г}}$	:5		:1		3	:7	

Задача 3.12.

Одна из страниц справочника «Футбол» с опубликованной на ней таблицей областных игр по футболу оказалась залитой чернилами. Все, что осталось от таблицы, имело следующий вид:

ФУТБОЛЬНЫЙ ТУРНИР

№	Команда	Победы	Ничьи	Поражения	Очки	Мячи
1	Динамо		1			7:0
2	Спартак	3				4:4
3	Торпедо					1:7
4	Зенит					5:4
5	Алмаз	1				:3

Требуется восстановить таблицу и определить результаты всех матчей этого финала. При этом следует помнить, что команды в турнирной таблице расположены в соответствии с занятыми местами.

Условия следующих двух задач раздела связаны с соревнованием двух спортсменов. Естественно, что здесь не требуется составлять турнирную таблицу. Решение этих задач требует несложных арифметических подсчетов.

Задача 3.13.

Иван и Антон произвели по пять выстрелов в одну мишень, попав в «5» один раз, в «7» два раза, в «8» один раз, в «9» два раза, в «10» два раза, в «11» один раз, в «12» один раз. Четырьмя последними выстрелами Иван выбил в семь раз больше очков, чем первым. Известно, что и Иван, и Антон попали в круг «10».

Кто из них попал в круг «12»?

Решение задачи 3.13. Обозначим через a_i результат i-го выстрела Ивана. Тогда по условию задачи $a_2+a_3+a_4+$ $+a_5=7a_1$.

Максимальное число очков, которое можно по условию выбить четырьмя выстрелами, $12+11+10+10=43$. Ясно, что

a_1 не может быть больше 6 (иначе $7a_1 > 43$). Значит, $a_1 = 5$ и $a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 35$. Известно, что одно из чисел a_2, a_3, a_4, a_5 равно 10. Пусть $a_2 = 10$. Тогда $a_3 + a_4 + a_5 = 25$. Если бы Иван попал в круг «12» (например, $a_3 = 12$), то $a_4 + a_5 = 13$, а это невозможно, зная, в какие круги могли попасть спортсмены. Отсюда следует, что в круг «12» попал Антон.

Задача 3.14.

Два стрелка произвели по 5 выстрелов, причем попадания были следующие: 10, 9, 9, 8, 8, 5, 4, 4, 3, 2. Первыми тремя выстрелами они выбили одинаковое количество очков, но тремя последними выстрелами первый стрелок выбил втрое больше очков, чем второй.

Определите, сколько очков набрал каждый из них третьим выстрелом.

Задача 3.15.

Стрелок десять раз выстрелил по стандартной мишени и выбил 90 очков. Сколько было попаданий в семерку, восьмерку и девятку, если десяток было четыре, а других попаданий и промахов не было?

Задача 3.16.

На соревнованиях по стрельбе спортсмен после шести выстрелов набрал 96 очков. Проверка мишени показала, что в ней имеется только три отверстия. Судьи установили, что в некоторые отверстия пули попали более одного раза. Определите, какие попадания могли дать в сумме 96 очков, если круги мишени оценены в 1, 2, 3, 5, 10, 20, 25 и 50 очков.

Задача 3.17.

В финале школьной математической олимпиады участвовали три команды: «Альфа», «Бета» и «Гамма».

Каждая команда должна была составить пять задач и дать их решать своим соперникам.

При подведении итогов выяснилось, что команда «Альфа» смогла решить только одну из задач, предложенных командой «Бета», и четыре задачи «Гаммы».

Команда «Бета» решила три задачи, предложенные «Гаммой», и две задачи «Альфы».

«Гамма» нашла решение всех пяти задач «Альфы», но не смогла решить ни одной задачи «Беты».

Общее место присуждалось по итогам двух конкурсов:

1) на сложность (трудность) составления задачи;

2) на умение решать задачи.

За первое место в каждом конкурсе присуждалось 2 балла, за второе — 1 балл; третье место не оценивалось.

Определите, сколько баллов получила каждая команда в обоих конкурсах и каково итоговое распределение мест.

Решение задачи 3.17. Воспользуемся таблицей:

Команда	Альфа	Бета	Гамма
Альфа		1	4
Бета	2		3
Гамма	5	0	

Из этой таблицы видно, что каждая из трех команд решила по пять задач, предложенных ей двумя другими командами. Поэтому во втором конкурсе (на умение решать задачи) всем командам следует присудить одинаковое количество баллов (ноль, один или два).

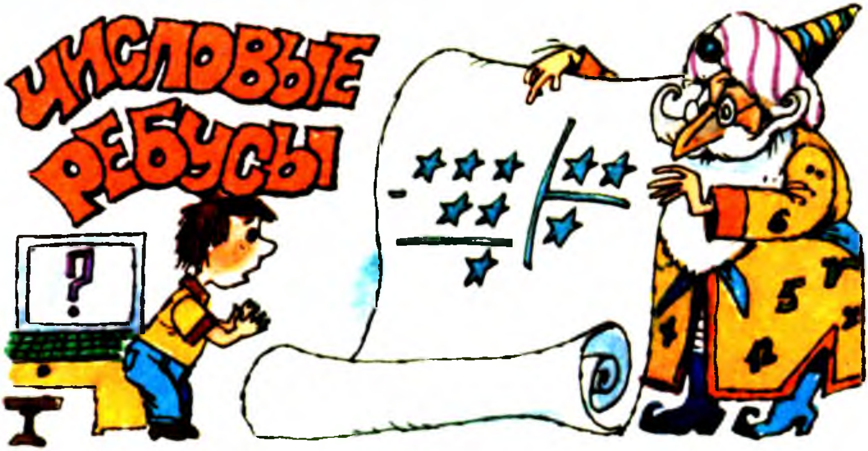
Задачи, составленные командой «Бета», были самые трудные. Команда «Альфа» решила одну из них, а команда «Гамма» ни одной. Значит, первое место в конкурсе на сложность составления задачи нужно присудить команде «Бета». Задачи команд «Альфа» и «Гамма» оказались одинаковой трудности. Команды-противники решили их по 7. Поэтому второе и третье места следует разделить между командами «Альфа» и «Гамма».

Итоговое распределение мест:

1-е место — команда «Бета».

2-е и 3-е места разделили между собой команды «Альфа» и «Гамма».

ЧИСЛОВЫЕ РЕБУСЫ



К числовым ребусам относят арифметические равенства, в которых все или некоторые числа заменены символами (буквами, звездочками, геометрическими фигурами и т. д.). Числовой ребус представляет собой задачу, в которой путем логических рассуждений требуется расшифровать значение каждого символа и восстановить числовую запись.

В Индии и Китае числовые ребусы появились более 1000 лет назад. В Европе такие задачи начали придумывать в начале XX века и их называли крипп-арифметическими (по-гречески κριπτο — спрятанный). В нашей литературе их называют числовыми ребусами или числовыми головоломками.

В настоящее время установились некоторые правила шифровки и дешифровки числовых ребусов.

Так, при шифровке разные цифры заменяют разными буквами, избегают замещать нуль буквой *О*, применяют один небуквенный символ, заменяющий любую цифру (например, «звездочка»).

В большинстве случаев формулировка задачи обеспечивает единственность ее решения.

Некоторые рекомендации можно сформулировать и по поводу дешифровки числовых ребусов.

Так, если расшифровывается пример, в котором цифры зашифрованы буквами, то различными буквами заменены различные цифры. Поэтому если найдено цифровое значение одной из букв, то другие буквы это значение принимать не могут.

Если в результате умножения некоторого числа на однозначное число получено исходное число, то, очевидно, множитель равен 1.

Нуль не может быть крайней левой цифрой в числе, а результат умножения на нуль состоит из одних нулей.

Если в результате умножения некоторого числа, не оканчивающегося нулем, на некоторое однозначное число в числе единиц получен нуль, то число единиц множимого и множителя есть пара чисел, одно из которых равно пяти, второе — четное.

Если произведение некоторого двузначного числа на число, большее или равное пяти,— двузначное число, то ясно, что множимое начиналось с единицы.

Подобных особенностей при расшифровке числовых ребусов можно отметить очень много. Они будут встречаться и выясняться в ходе решения предлагаемых примеров.

Рассмотрим класс задач, в которых применяется один небуквенный символ, заменяющий любую цифру (например, «звездочка»).

Большинство задач в этом классе представляет собой зашифрованные примеры на умножение или деление, и в них требуется вместо звездочек поставить цифры.

Рассмотрим ряд из таких примеров.

✲ Задача 4.1.

$$\times\begin{array}{r} ** \\ 8 \\ \hline *6 \end{array}$$

Решение задачи 4.1. Так как при умножении двузначного числа ** на число 8 мы получаем двузначное число, то число десятков множимого должно быть равно 1.

При умножении числа единиц множимого на число 8 мы получаем в числе единиц число 6. Это возможно в двух случаях: или число единиц множимого равно 2, или оно равно 7. Но в последнем случае имеем $17\times8=136$, т. е. число трехзначное. Значит, число единиц множимого равно 2 и пример расшифровывается так:

$$\times\begin{array}{r} 12 \\ 8 \\ \hline 96 \end{array}$$

✲ Задача 4.2.

$$\times\begin{array}{r} **7 \\ * \\ \hline **6 \end{array}$$

Решение задачи 4.2. Так как произведение множителя на число 7 в числе единиц имеет 6, то множитель равен 8. Так как произведение трехзначного числа на 8 дает трехзначное число, то число сотен множимого равно 1. Покажем, что число десятков множимого также равно 1. В самом деле, если бы число десятков множимого было бы больше 1, например 2, то произведение множимого на 8 давало бы четырехзначное число. Значит, пример расшифровывается так:

$$
\begin{array}{r}
\times\ 117 \\
8 \\
\hline
936
\end{array}
$$

Задача 4.3.

$$
\begin{array}{r}
\times\ ** \\
8* \\
\hline
+\ *** \\
** \\
\hline
****
\end{array}
$$

Решение задачи 4.3. Чтобы при умножении двузначного числа ** на 8 получить двузначное число, необходимо, чтобы множимое начиналось с единицы, т. е. двузначное число должно иметь вид 1*.

Так как произведение числа 1* на 8 дает двузначное число, то число его единиц не более 2 (0, 1, 2).

Произведение числа 1* на число единиц множителя дает трехзначное число. Значит, число единиц множителя более 8, т. е. 9.

Для того чтобы произведение числа 1* на 9 давало трехзначное число, необходимо, чтобы число единиц его было больше единицы, т. е. 2.

Следовательно, пример расшифровывается так:

$$
\begin{array}{r}
\times\ 12 \\
89 \\
\hline
+\ 108 \\
96 \\
\hline
1068
\end{array}
$$

Задача 4.4.

$38,* \times *6 = ***$

Задача 4.5.

$$
\begin{array}{r}
\times\ *1* \\
3*2 \\
\hline
+\ *3* \\
3*2* \\
*2*5 \\
\hline
****3*
\end{array}
$$

Задача 4.6.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \ast & 9 & \ast \\
\times & & \ast & 1 & \ast \\
\hline
 & & 2 & \ast & 2 \\
+ & \ast & \ast & \ast & \\
\ast & \ast & \ast & & \\
\hline
\ast & \ast & 6 & \ast & 2
\end{array}$$

Задача 4.7.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & 1 & 2 & 6 \\
 & \times & & \ast & \ast \\
\hline
 & + & \ast & \ast & \ast \\
\ast & \ast & \ast & \ast & \\
\hline
1 & \ast & 2 & \ast & 6
\end{array}$$

Задача 4.8.

$$\begin{array}{r|l}
-\,14\ast\ast & \ast 7 \\
\cline{2-2}
\underline{\ast\ast 5} & \ast\ast \\
-\,\ast\ast & \\
\underline{\ast 1} & \\
0 &
\end{array}$$

Замечание: очевидно, примеры на деление могут быть сведены к примерам на умножение.

Так, задача 4.8 сводится к задаче:

$$\begin{array}{cccc}
 & & \ast & 7 \\
 & \times & \ast & \ast \\
\hline
 & & \ast & 1 \\
+ & \ast & \ast & 5 \\
\hline
1 & 4 & \ast & \ast
\end{array}$$

Задача 4.9.

$$\begin{array}{r|l}
-\,\ast\ast\ast & \ast\ast \\
\cline{2-2}
\underline{\ast\ast} & \ast \\
\ast &
\end{array}$$

Здесь все цифры, которые участвуют в примере, различны.

Вторым, наиболее обширным классом числовых ребусов являются задачи, в которых цифры заменены буквами (или знаками) так, что каждой букве соответствует своя цифра, а каждой цифре — своя буква. Таким образом, здесь для шифровки ребуса используется до 10 букв (по числу различных цифр).

В некоторых задачах этого класса используют для шифровки и звездочки, но они носят вспомогательный характер, так как расшифровка ребуса обеспечивается расшифровкой входящих в него букв.

Задачи этого класса ребусов можно разделить на несколько типов:

1) ребусы, содержащие суммы чисел;
2) ребусы, содержащие произведения различных чисел;
3) ребусы, содержащие степени чисел;
4) ребусы, представляющие собой системы уравнений.

Каждый из перечисленных типов имеет свои особенности, которые иногда способствуют расшифровке ребуса. В то же время ясно, что есть одна особенность, характерная для всех перечисленных типов задач.

Действительно, числовые ребусы содержат арифметические операции, от которых почти всегда можно перейти к двум операциям: сложению и умножению. Последнее обстоятельство позволяет свести расшифровку ребуса к решению системы алгебраических уравнений. Покажем такой переход на одном из примеров.

Задача 4.10.
$$\begin{array}{r} +\begin{array}{r}\text{КОЗА}\\ \text{КОЗА}\end{array}\\ \hline \text{СТАДО}\end{array}$$

Решение задачи 4.10. Из условия задачи следует система алгебраических уравнений относительно неизвестных К, О З, А, С, Т, Д.

$$\left.\begin{aligned} 2\cdot А \quad &= 10\alpha + О,\\ 2\cdot З + \alpha &= 10\beta + Д,\\ 2\cdot О + \beta &= 10\gamma + А,\\ 2\cdot К + \gamma &= 10С + Т. \end{aligned}\right| \qquad (1)$$

Здесь α,β,γ — неизвестные числа, каждое из которых может принимать одно из двух значений: 0 и 1. Из четвертого уравнения системы (1) заключаем, что $С=1$ и $К\geqslant 5$.

Вычтем из первого уравнения системы третье уравнение. Получим уравнение $2(А-О)-\beta=10(\alpha-\gamma)+О-А$, или

$$3(А-О)=10(\alpha-\gamma)+\beta. \qquad (2)$$

Это уравнение при $\beta=0$ не имеет решения в целых числах, так как его левая часть делится на 3, а правая часть делится на 3 только при $\alpha=\gamma$. Но при этом А равно 0. При $\beta=1$ уравнение (2) имеет решение только при $\alpha=0$, $\gamma=1$, т. е. когда оно имеет вид $3(А-О)=-9$. Отсюда $О=А+3$. При этом из первого уравнения системы (1) находим $\alpha=0$, $А=3$, $О=6$. Из второго уравнения системы (1) при $\alpha=0$ и $\beta=1$ получаем уравнение $2\cdot З=10+Д$. Так как З и Д не могут принимать значений 3 и 6, то последнее уравнение имеет три решения:

1) $Д=4$, $З=7$; 2) $Д=8$, $З=9$; 3) $Д=0$, $З=5$.

Рассмотрим теперь четвертое уравнение системы (1).

Как отмечалось, $К\geqslant 5$. Но при $К=5$ $Т=С=1$. $К\neq 6$, так как $О=6$.

Если $К=7$, $Т=5$, то из трех решений второго уравнения единственно возможным остается вариант 2, т. е. $А=3$, $О=6$, $Д=8$, $З=9$, $С=1$, $К=7$, $Т=5$, и ребус расшифровывается так:

$$\begin{array}{r} +\begin{array}{r}7693\\ 7693\end{array}\\ \hline 15386\end{array}$$

Если $К=8$, $Т=7$, то аналогично остается третий вариант. Следовательно, $А=3$, $О=6$, $Д=0$, $К=8$, $Т=7$, и ребус расшифровывается так:

$$\begin{array}{r} +\begin{array}{r} 8653 \\ 8653 \end{array} \\ \hline 17306 \end{array}$$

Далее, $К\neq 9$, так как при $К=9$ $Т=9$. Таким образом, задача имеет два решения.

Отметим, что переход к системе алгебраических уравнений часто позволяет увидеть связи между различными буквами (в только что рассмотренном примере это было совместное решение первого и третьего уравнений системы). В то же время этот переход приводит нас иногда к более громоздкой задаче, и поэтому целесообразно сначала рассмотреть все возможные пути отыскания неизвестных цифр путем логических рассуждений.

* Задача 4.11.

$$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r} ДВА \\ ДВА \end{array} \\ \hline +\begin{array}{r} ОЛЛО \\ ЧОЛ \end{array} \\ \hline ЧИСЛО \end{array}$$

Решение задачи 4.11. Очевидно, в этом примере $В=0$. Значит, $А\neq 0$, $Д\neq 0$.

Так как $А\cdot А=А^2=ЛО$, а $Д\cdot А=ОЛ$, то число $Д\cdot А$ получается перестановкой цифр в числе $А^2=ЛО$.

Легко убедиться, что $ЛО=А^2=81$. Действительно, это не могут быть квадраты чисел 1, 2, 3, так как они дают однозначные числа 1, 4, 9.

В остальных случаях квадраты чисел 4, 5, 7, 6, 8, 9 дают числа 16, 25, 49, 36, 64, 81. При перестановке цифр в этих числах получим числа 61, 52, 94, 63, 46, 18. Из них только число 18 удовлетворяет условиям $А^2=ЛО$ и $Д\cdot А=ОЛ$. Поэтому $А=9$, а $Д==2$. Таким образом, имеем:

$$\begin{array}{r} \times\begin{array}{r} 209 \\ 209 \end{array} \\ \hline +\begin{array}{r} 1881 \\ 418 \end{array} \\ \hline 43681 \end{array}$$

И значит, $Д=2$, $В=0$, $А=9$, $О=1$, $Л=8$, $Ч=4$, $И=3$, $С=6$.

Задача 4.12.

$(Р+О+М+А)^4=РОМА.$

Задача 4.13.

$(АА)^Н=АННА.$

Задача 4.14.

$Я^С=семья.$

Задача 4.15.

$$(\triangle\ \square)^{\triangle}=\square\ \lozenge\ \square$$

Задача 4.16.

$$\begin{array}{r} \text{казак} \\ \text{казак} \\ \text{казак} \\ +\ \text{казак} \\ \text{казак} \\ \text{казак} \\ \hline \text{сотня} \end{array}$$

Задача 4.17. $(ПАР)^2=АХАХА.$

Задача 4.18.

$$(ОН)^3=АКОП,\quad А+К+О+П=ОН.$$

И оба равенства должны выполняться одновременно.

Особенность следующего примера состоит в том, что в нем нет взаимно однозначного соответствия между цифрами и буквами. Здесь используются лишь две буквы «Ч» и «Н».

Задача 4.19.

Решите арифметический ребус, поставив вместо буквы «Ч» четные цифры, а вместо буквы «Н» нечетные цифры:

$$\begin{array}{r} \text{ЧЧН} \\ \times\ \text{НН} \\ \hline \text{ЧНЧН} \\ +\ \text{ЧНН} \\ \hline \text{ННННН} \end{array}$$

В последних двух примерах, как и прежде, предполагается взаимнооднозначное соответствие между буквами и цифрами, но числовые соотношения носят сложный характер. Здесь мы имеем дело с системой уравнений.

Кстати, в них не должна удивлять и символическая запись математических операций, хотя она и не принята в обычной практике.

Задача 4.20.

$$\begin{array}{ccccc}
\text{ААФ} & - & \text{ДЕ} & = & \text{КС} \\
: & & - & & - \\
\text{АС} & \times & \text{Д} & = & \text{ГА} \\
\hline
\text{С} & + & \text{ЕФ} & = & \text{ДМ}
\end{array}$$

Решение задачи 4.20. Так как при вычитании из числа ААФ числа ДЕ получаем двузначное число, то А = 1.

При делении числа 11Ф на число 1С мы должны получить С. Но при делении чисел 110, 111, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 118, 119 соответственно на числа 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19 только в случае деления 119 на 17 в результате получим целое число: 119 : 17 = 7. Значит, С = 7, Ф = 9.

При вычитании из числа 119 числа ДЕ мы получаем число К7. Отсюда ясно, что Е = 2.

Но тогда сумма С + ЕФ = 36. По условию она равна ДМ. Следовательно, Д = 3, М = 6.

Так как разность ААФ − ДЕ = 119 − 32 = 87, ААФ − ДЕ = К7, то К = 8. Произведение АС × Д = 17 × 3 = 51. Значит, ГА = 51, следовательно, Г = 5. Итак, ребус может быть записан в виде

$$\begin{array}{ccccc}
119 & - & 32 & = & 87 \\
: & & - & & - \\
17 & \times & 3 & = & 51 \\
\hline
7 & + & 29 & = & 36
\end{array}$$

Задача 4.21.

$$\begin{array}{ccccc}
\text{АЕЕ} & + & \text{БА} & = & \text{ГВД} \\
- & & + & & - \\
\text{МКК} & - & \text{АК} & = & \text{МАД} \\
\hline
\text{МКК} & + & \text{НВ} & = & \text{АКД}
\end{array}$$

Задача 4.22.

ABCDEF — число из шести цифр. Все они разные, расположены слева направо в возрастающем порядке. Число это квадрат. Определите, какое это число.

Большинство задач такого типа строится по принципу: имеется одно, два или три множества людей. Представители одного из множеств говорят только правду, представители другого множества говорят только ложь, а представители третьего множества могут говорить как правду, так и ложь. В задаче приводится несколько высказываний представителей указанных множеств. По этим высказываниям и некоторой дополнительной информации, данной в задаче, требуется установить истину.

Наиболее простым случаем является задача, по условию которой имеется группа людей и каждый ее представитель высказал по два утверждения. При этом известно, что одно из высказанных утверждений истинно, а другое ложно.

При решении задач этого вида рационально поступать так: берется одно из двух утверждений некоторого представителя группы людей и предполагается, что оно истинно. Если при этом рассмотрение утверждений других членов группы не приводит к противоречию, то мы приходим к выводу, что рассмотренное утверждение действительно истинно. Если же при рассмотрении утверждений других членов группы мы приходим к противоречию, то взятое нами за истинное утверждение одного из членов группы является ложным и, следовательно, второе его утверждение является истинным.

В более сложных случаях формулировки рассматриваемых задач не указывают, являются ли высказывания каждого конкретного представителя группы истинными или ложными. При этом известно лишь общее число истинных или ложных высказываний и требуется установить, какие из них являются истинными. Чаще всего это удается сделать путем перебора предположений об истинности одной части высказываний. Если предположения такого рода не приводят к противоречию, то приходим к решению задачи.

Рассмотрим соответствующие примеры:

✲ Задача 5.1.

Три ученика различных школ города Новгорода приехали на отдых в один летний лагерь.

На вопрос вожатого, в каких школах Новгорода они учатся, каждый дал ответ:

Петя: «Я учусь в школе № 24, а Леня — в школе № 8».

Леня: «Я учусь в школе № 24, а Петя — в школе № 30».

Коля: «Я учусь в школе № 24, а Петя — в школе № 8».

Вожатый, удивленный противоречиями в ответах ребят, попросил их объяснить, где правда, а где ложь.

Тогда ребята признались, что в ответе каждого из них одно утверждение верно, а другое — ложно. В какой школе учится каждый из мальчиков?

Решение задачи 5.1. Предположим, что верно первое утверждение Пети: *«Петя учится в школе № 24»*. Тогда, очевидно, будут ложными второе утверждение Пети и первые утверждения Лени и Коли. Но при этом истинными оказываются вторые утверждения Лени и Коли: *«Петя учится в школе № 30»*, *«Петя учится в школе № 8»*. В результате исходного предположения мы пришли к противоречию: Петя оказался учеником трех школ. Значит, наше предположение об истинности первого утверждения неверно.

Предположим теперь, что верно второе утверждение Пети: *«Леня учится в школе № 8»*. Тогда, очевидно, ложны первые утверждения Пети и Лени и второе утверждение Коли. Но при этом оказывается истинным второе утверждение Лени и первое утверждение Коли, которые не дают противоречий. Значит, Леня учится в школе № 8, Петя — в школе № 30, а Коля — в школе № 24.

✲ Задача 5.2.

Четыре спортсменки: Аня, Валя, Галя и Даша — заняли первые четыре места в соревновании по гимнастике, причем никакие две из них не делили между собой эти места. На вопрос, какое место заняла каждая из них, трое болельщиков ответили:

1-й: «Аня — второе место, Даша — третье место».

2-й: «Аня — первое место, Валя — второе место».

3-й: «Галя — второе место, Даша — четвертое место».

Оказалось, что каждый из болельщиков ошибся один раз. Какое место заняла каждая из спортсменок?

✻ Задача 5.3.

Четверо мальчиков: Алеша, Ваня, Боря и Гриша — соревновались в беге. После соревнований каждого из них спросили, какое место он занял. Ребята дали следующие ответы:

Алеша: «Я не был ни первым, ни последним».

Боря: «Я не был первым».

Ваня: «Я был первым».

Гриша: «Я был последним».

Три из этих ответов правильны, а один нет. Кто сказал правду? Кто был первым?

Решение задачи 5.3. Для решения задачи необходимо установить неверный ответ.

Предположим, что неправду сказал Алеша. Считая, что Алеша сказал неправду, можно утверждать, что он был или первым или последним. Но тогда неправду сказал еще один из мальчиков (Ваня или Гриша), а это противоречит условию задачи, согласно которому неверный ответ был один.

Предположим, что неправду сказал Боря. Это значит, что Боря был первым. То же самое утверждает Ваня, и мы вновь пришли к противоречию.

Предположим, что неверный ответ дал Ваня. Тогда Ваня не был первым. Но Алеша, Боря и Гриша утверждают, что и они не на первом месте. Значит, кто-то из них говорит неправду, и мы вновь пришли к противоречию.

Полученные ранее противоречия приводят к тому, что Гриша дал неверный ответ. Поэтому правильные ответы дали Алеша, Боря и Ваня. Первым был Ваня.

Задача 5.4.

Один из пяти братьев разбил окно. Андрей сказал: «Это Витя или Толя». Витя сказал: «Сделал это не я и не Юра». Толя сказал: «Вы оба говорите неправду». Дима сказал: «Нет, один из них сказал правду, а другой неправду». Юра сказал: «Нет, Дима, ты не прав».

Их отец, которому, конечно, можно доверять, уверен, что не менее трех братьев сказали правду. Кто разбил окно?

Задача 5.5.

По подозрению в совершенном преступлении задержали Брауна, Джона и Смита. Один из них был уважаемым в городе стариком, другой — малоизвестный чиновник, а третий — известный мошенник. В процессе следствия старик говорил правду, мошенник лгал, а третий задержанный в одном случае говорил правду, а в другом — ложь. Вот что они утверждали:

Браун: «Я совершил это. Джон не виноват».

Джон: «Браун не виноват. Преступление совершил Смит».

Смит: «Я не виноват, виноват Браун».

Определите имена старика, мошенника и чиновника. Кто из них виноват?

Задача 5.6.

Один из трех гангстеров, известных в городе М под кличками Арчи, Босс и Весли, украл портфель с деньгами. На допросе каждый из них сделал три заявления.

Арчи: 1. Я не брал портфель.
2. В день кражи я уезжал из города М.
3. Портфель взял Весли.

Босс: 1. Портфель взял Весли.
2. Если бы я взял его, я бы не сознался.
3. У меня и так много денег.

Весли: 1. Я не брал портфель.
2. Я давно ищу хороший портфель.
3. Арчи прав, говоря, что он уезжал из М.

В ходе следствия выяснилось, что из трех заявлений каждого гангстера два верных, а одно неверно. Кто украл портфель?

Задача 5.7.

Вернувшись с рыбной ловли, Петя, Вася и Коля стали рассказывать дома о своих успехах:

Петя сказал: 1. Коля поймал только две рыбы.
2. Вася поймал на одну больше, чем Коля.
3. Мы с Васей поймали на восемь штук больше, чем Коля.
4. Я наловил рыбы больше, чем Коля и Вася вместе.

Вася сказал: 1. Коля наловил рыбы больше всех.
2. Я поймал на три штуки больше, чем Петя.
3. Коля ошибается, что я ничего не поймал.
4. Петя и Коля наловили поровну.

Коля сказал: 1. Вася не выудил ни одной рыбешки.
2. Петя говорит неправду, что поймал только две штуки.
3. Мы с Петей наловили не поровну.
4. Вася и Петя наловили вместе тринадцать штук.

Тут ничего не поделаешь, рыбаки, так же как и охотники, любят приврать. И каждый из рыболовов лишь два раза из четырех говорили правду. Сколько же на самом деле рыбы наловил каждый из них?

Задача 5.8.

Легенда рассказывает, что в одной давно забытой стране был храм. В этом храме находились статуи трех богов: бога правды, бога лжи и бога дипломатии, которые располагались в храме в один ряд. Статуи обладали замечательным свойством — они отвечали на вопросы верующих.

Было известно, что бог правды всегда говорил правду, бог лжи — всегда ложь, а бог дипломатии — иногда правду, а иногда ложь. Внешне статуи были похожи, и никто из верующих не знал, какая из статуй является богом правды, какая богом лжи, а какая богом дипломатии. В связи с этим верующим приходилось обращаться к жрецам, чтобы выяснить, что же в ответах богов является правдой. Однажды молодой крестьянин по прозвищу Простак пришел в храм с твердым намерением узнать, какая статуя каким богом является. Он смиренно подошел к статуе, которая была расположена от него справа, и спросил ее: «Какой бог находится рядом с тобой?» Статуя ответила: «Бог правды». Тогда он обратился к статуе крайней слева и задал ей тот же вопрос. Статуя ответила: «Бог лжи». Тогда он обратился к статуе, стоящей в центре, и спросил: «Кто же ты?», на что та ответила: «Бог дипломатии». «Теперь все ясно»,— сказал себе Простак. Каким образом Простак разгадал тайну богов?

Задача 5.9.

Жители города Правдина всегда говорят только правду, а жители города Лгуново всегда лгут. В одном из этих городов между командами этих городов состоялся футбольный матч. После матча рядом со стадионом, на котором он проводился, произошел следующий разговор:

1. А (обращаясь к Б и В): «Я не был на матче, скажите, кто выиграл».
2. Б: «Г сказал, что их команда проиграла».
3. В: «Наша команда выиграла».
4. Г (садясь в автобус, который идет в другой город, и обращаясь к А): «Поедем вместе, мы же из одного города».

5. А: «Вы ошибаетесь, Г, я живу здесь. Это В из вашего города».

Определите, кто из какого города, где проходил матч, какая команда выиграла.

Задача 5.10.

На острове Трисельске имеются три деревни: Правдино, Чередово и Лгуново. Известно, что жители первой деревни всегда говорят только правду, жители третьей деревни всегда лгут, а жители второй деревни чередуют ложь с правдой. При этом первый ответ чередовцев может оказаться как правдой, так и ложью.

Как-то раз приезжий встречался с пятью островитянами, которым он по характерным чертам дал следующие прозвища: Алощек, Косоглаз, Борода, Курнос и Длинноух. Желая узнать, в каких деревнях эти люди живут, приезжий попросил первых двух рассказать ему по порядку, кто из какой деревни родом.

Косоглаз ответил, что Борода — чередовец, Курнос — правдовец, Алощек также родом из Чередово, а Длинноух — лгуновец.

Борода, однако, утверждал, что Косоглаз — чередовец, Курнос из Лгунова, Алощек — правдовец, а Длинноух из Чередово.

Можно ли из полученных ответов сделать верные выводы о родной деревне каждого из пяти островитян?

Задача 5.11.

На острове жили два племени. Люди одного из них говорили всегда правду, а люди другого племени — только ложь.

Путешественник вышел на развилку дорог, и ему нужно было спросить у проходящего мимо островитянина, какая дорога ведет в деревню. Отличить по внешнему виду лживого от правдивого он не мог. Путешественник задумался, а затем задал встречному только один вопрос. По ответу он узнал, по какой дороге ему следует идти.

Какой вопрос он задал островитянину?

* Задача 5.12.

На острове живут два племени: аборигены и пришельцы. Аборигены всегда говорят правду, а пришельцы всегда лгут. Путешественник, приехавший на остров, нанял островитянина в проводники. Они пошли и увидели другого островитянина. Путешественник послал проводника узнать, к какому племени принадлежит этот туземец. Проводник вернулся и сказал: «Туземец говорит, что он абориген».

Кем был проводник: пришельцем или аборигеном?

Игровые логические задачи являются наиболее распространенными в литературе по занимательной математике. Учитывая их обилие и многообразие, ограничимся рассмотрением нескольких типов игровых задач, в основном для двух участников игры.

Начнем с рассмотрения простой задачи.

✻ Задача 6.1.

Двое играют в такую игру. Имеется кучка камней. Двое играющих (начинающий и его противник) по очереди берут по своему усмотрению один, два или три камня. Проигрывает тот, кто возьмет последний камень.

1) В кучке шесть камней. Как должен играть начинающий, чтобы выиграть? Как должен играть противник, если начинающий в одном из своих ходов допустит ошибку? Как меняется план игры, если в кучке семь или восемь камней?

2) В кучке одиннадцать камней. Как должен играть начинающий, чтобы выиграть? Как должен играть противник, если начинающий в одном из своих ходов допустит ошибку?

Решение задачи 6.1. 1) Пусть в кучке шесть камней. Расположим их в ряд, выделив первый и последний камни, а в середине — группу из четырех камней.

Рассмотрим различные варианты игры.

Если начинающий возьмет три камня, то противник возьмет два камня и выиграет, так как начинающему остается один камень и, взяв его, начинающий проигрывает.

Если начинающий возьмет два камня, то противник возьмет три камня и вновь выигрывает.

Если начинающий возьмет один камень, то при любом ходе противника начинающий выигрывает. Действительно, при любом ходе противника, который возьмет из выделенной четверки камней один, два или три камня, начинающий возьмет оставшиеся камни четверки и противнику останется единственный камень.

Значит, начинающий выигрывает, если он своим первым ходом возьмет один первый камень, а после первого хода противника возьмет столько камней, что сумма камней, взятых его вторым ходом и первым ходом противника, равняется четырем.

Если в кучке семь камней, то для выигрыша в этом случае начинающему своим первым ходом следует взять два камня, а если в кучке восемь камней, то для выигрыша начинающему своим первым ходом следует взять три камня.

2) Пусть в кучке одиннадцать камней. Расположим их в ряд, выделим два первых камня и последний, а между ними две группы камней по четыре камня в каждой.

Очевидно, начинающий выигрывает, если он своим первым ходом возьмет два камня, а после каждого хода противника будет брать столько камней, чтобы сумма камней, взятых этим ходом начинающего и предыдущим ходом противника, равнялась четырем.

Как вести себя противнику, если начинающий в одном из своих ходов допустит ошибку?

Если начинающий своим первым ходом взял не два, а один камень, то противнику следует взять также один камень и он становится в позицию начинающего, а поэтому выигрывает.

Если начинающий своим первым ходом взял не два, а три камня, то противнику следует взять также три камня и он становится в позицию начинающего, а поэтому выигрывает.

Наконец, если начинающий допустил ошибку во втором ходе, например, противник взял из первой четверки камней один камень, а начинающий — один или два камня, то противнику следует взять последние камни этой четверки и тогда он выигрывает.

✲ Задача 6.2.

Двое играют в такую игру. Имеется 14 предметов. Играющие по очереди берут по своему усмотрению один, два или три предмета. Выигрывает тот, кто возьмет последний предмет.

При какой стратегии выигрывает начинающий? Как должен вести игру противник, если по ходу игры начинающий допустил ошибку? Как должен вести игру начинающий, если проигрывает тот, кто берет последний предмет?

Решение задачи 6.2. Так как число 14 представимо в виде суммы $14 = 2+4+4+4$, то выигрышной стратегией начинающего будет следующая.

Своим первым ходом начинающий должен взять два предмета, а потом после каждого хода противника, при котором противник берет p предметов ($p \leqslant 3$), брать $(4 - p)$ предметов. Очевидно, что при такой игре последний предмет берет начинающий.

Если начинающий не знает выигрышной стратегии и допускает в игре ошибку, то противник должен принять следующую стратегию:

1) Если начинающий своим первым ходом взял не два, а один предмет (или три предмета), то противнику следует взять также один предмет (или три предмета) и он становится в позицию начинающего.

2) Если начинающий допустил ошибку при своем втором (или последующем) ходе, т. е. после хода противника, взявшего p предметов, он взял не $(4 - p)$, а меньше (или больше) предметов, например k и $k < (4-p)$ $(k > (4-p))$, то противнику следует взять $4-p-k$ $(8-p-k)$ предметов и он станет в позицию начинающего.

Если проигрывает тот, кто берет последний предмет, то выиграшная стратегия начинающего такова: своим первым ходом он должен взять один предмет, а после каждого хода противника, взявшего p предметов, брать $4-p$ предметов.

Рассмотренный пример, естественно, приводит к постановке задачи в общем виде.

Задача 6.3.

Имеется n предметов. Играют двое, ходят по очереди. При каждом ходе играющий берет один, два, три и т. д. k предметов, $k < n$. Выигрывает тот, кто возьмет последний предмет.

При какой стратегии выигрывает начинающий? Как должен вести игру противник, если по ходу игры начинающий допустил ошибку? Как должен вести игру начинающий, если проигрывает тот, кто берет последний предмет?

Задача 6.4.

Имеется 15 предметов. Играют двое, ходят по очереди. При каждом ходе играющий берет один или три предмета. Выигрывает тот, кто возьмет последний предмет. При какой стратегии выигрывает начинающий?

Задача 6.5.

Имеется 22 предмета. Играют двое, ходят по очереди. При каждом ходе играющий берет два или четыре предмета. Выигрывает тот, кто берет последний предмет. При какой стратегии выигрывает начинающий?

Более интересными играми, связанными с двумя множествами, являются китайские народные игры, с подробным описанием и исследованием которых можно познакомиться в статьях [3], [9].

Задача 6.6.

На поле *f*8 шахматной доски стоит ферзь. Играют двое, ходят по очереди. Каждый за один ход может передвинуть ферзя либо на несколько клеток вниз по вертикали, либо на несколько клеток влево вниз по диагонали, либо на несколько клеток влево по горизонтали.

Проигрывает тот, кому некуда ходить, а выигрывает, следовательно, тот, кто поставит ферзя в левый нижний угол — на поле *a*1. Как играть, чтобы выиграть? Кто победит — начинающий или его партнер? И «кто — кого», если ферзь сначала стоял на поле *e*8?

Решение задачи 6.6. Ясно, что если ферзь стоит на поле *a*1, то тот, чья очередь ходить, уже проиграл. Поэтому отметим это поле знаком «минус».

Если ферзь стоит на поле, с которого одним ходом можно попасть на *a*1, то начинающий пойдет на *a*1 и выиграет. Поэтому отметим поля, с которых можно за один ход попасть на *a*1, знаком «плюс».

8	+	+	+	+	+	+	+	+
7	+	+	+	+	−	+	+	+
6	+	+	+	−	+	+	+	+
5	+	+	+	+	+	+	+	−
4	+	+	+	+	+	−	+	+
3	+	−	+	+	+	+	+	+
2	+	+	−	+	+	+	+	+
1	−	+	+	+	+	+	+	+
	a	b	c	d	e	f	g	h

Пусть теперь ферзь стоит на поле $c2$. Ясно, что начинающий игру с этого поля проиграет, так как при любом своем ходе он попадает на «плюс», после чего противник ставит ферзя на $a1$.

Поэтому $c2$ отметим «минусом», а все клетки, с которых можно за один ход попасть на $c2$, отметим знаком «плюс».

Нетрудно видеть, что знак «минус» следует поставить в клетках $b3$, $d6$, $e8$, $f4$, $h5$.

Теперь можно ответить на вопросы задачи.

1. Если ферзь стоит на клетке, отмеченной знаком «плюс», то начинающему достаточно первым ходом поставить ферзя на клетку, отмеченную знаком «минус», и выигрыш ему обеспечен.

2. Если ферзь стоит на клетке, отмеченной знаком «минус», то начинающий проигрывает.

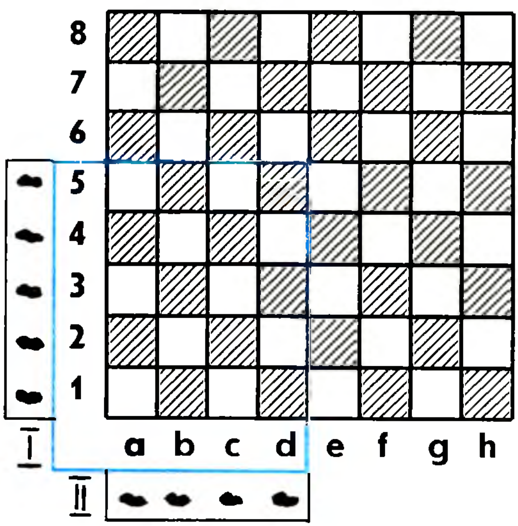
3. Если ферзь сначала стоял на клетке $e8$ (она отмечена знаком «минус»), то начинающий проигрывает.

Задача 6.7.

В двух кучках лежат камни: в первой — m, во второй — n ($m \neq n$). Играют двое, ходят по очереди. Каждый из игроков при своем ходе может взять либо произвольное число камней из первой кучки, либо любое число камней из второй кучки, либо поровну камней из обеих кучек. Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

Существует ли выигрышная стратегия для начинающего?

Решение задачи 6.7. Решение этой задачи легко связать с решением рассмотренной задачи 6.6. Действительно, пусть для конкретности $m=5$, а $n=4$. Рассмотрим шахматную доску. По-



ставим ферзя на поле $e6$. Тогда можно считать, что под ферзем лежат 4 камня, а слева от ферзя — 5.

Каждому положению ферзя на доске можно сопоставить две кучки камней: в первой — столько камней, сколько горизонталей находится под ферзем, а во второй — сколько вертикалей слева от ферзя. Таким образом, установлено соответствие между позициями в играх в задачах 6.6 и 6.7: каждому распределению камней по кучкам соответствует поле шахматной доски, а каждому полю доски соответствует пара кучек камней. Установим соответствие и между ходами в этих играх. Если берется несколько камней из первой кучки, то ферзь сдвигается на столько же полей вниз, если из второй — ферзь сдвигается на столько же полей влево, а если камни взяты из обеих кучек, то ферзь сдвигается влево вниз по диагонали. Если, например, из каждой кучки в приведенной позиции берется по одному камню, то ферзь ходит с $e6$ на $d5$. Очевидно, что игрок, поставивший ферзя своим последним ходом на поле $a1$, выигрывает. Для игры, рассмотренной в задаче 6.7, это означает, что выигрывает игрок, взявший последний (последние) камень.

Из сказанного следует, что начинающий имеет выигрышную стратегию, если он после своего первого хода может оставить в кучках такое количество камней, которое соответствует выигрышному положению ферзя на шахматной доске (ферзь поставлен на поле, отмеченное знаком «минус»). Легко видеть, что при $m=5$ и $n=4$ начинающий выиграет, если он своим первым ходом возьмет один камень из второй кучки (ферзь ставится на поле $d6$) или возьмет из обеих кучек по три камня (ферзь ставится на поле $b3$).

Легко видеть, что если m и n таковы, что это соответствует положению ферзя на поле, отмеченном знаком «минус», то начинающий проигрывает (при правильной игре противника).

Ограниченность шахматной доски не означает, что при нашей игре с камнями мы можем брать только кучки с количеством камней не более восьми. Действительно, мы можем мысленно продолжить шахматную доску вправо вверх и расставить на этом продолжении знаки «плюс» и «минус» по следующим правилам:

1) Если с поля некуда пойти, то ставим знак «минус».

2) Если с рассматриваемого поля можно попасть на поле, отмеченное «минусом», то ставим знак «плюс».

3) Если все ходы ведут на поле, отмеченное «плюсами», то ставим «минус».

Вероятно, все дети знакомы с игрой в крестики-нолики. При правильной стратегии играющих она всегда приводит к ничейному результату. Однако, изменяя условия и правила этой игры, можно получить интересные задачи. Рассмотрим одну из них.

✲ Задача 6.8.

Двое играют в крестики-нолики на доске 3×3 по измененным правилам: каждый на своем ходу может поставить как крестик, так и нолик. Выигрывает тот, после хода которого образуется три подряд стоящих одинаковых значка (по вертикали, горизонтали или диагонали, как и в обычных крестиках-ноликах). Кто выигрывает в эту игру: начинающий или этот игрок? И как?

✲ Задача 6.9.

На самом левом поле клетчатой полосы 1×1977 лежат три пуговицы. Двое играют в следующую игру: каждый из них может перенести любую пуговицу (но только за один ход) вправо на любое число полей. Проигрывает тот, кому некуда ходить. Докажите, что начинающий игру может обеспечить себе победу. Проанализируйте стратегию противника для выигрыша, если начинающий не знает выигрышной стратегии.

✲ Задача 6.10.

Двое мальчиков играют в такую игру: они по очереди ставят ладьи на шахматную доску. Выигрывает тот, при ходе которого все клетки доски оказываются побитыми, поставленными фигурами. Кто выигрывает в этой игре, если оба стараются играть наилучшим образом?

Задача 6.11.

На круглом столе лежат 11 шашек: 5 черных и 6 белых. Пятеро сидящих за столом ребят играют в следующую игру. Сначала каждый берет по две шашки, потом начинающий берет оставшуюся шашку. Если у него оказываются все три шашки одинакового цвета, то он выиграл и игра прекращается, если нет, то он оставляет себе две шашки одинакового цвета, а третью предлагает противнику. Если у того окажутся все шашки одинакового цвета, то выиграл он, если нет, то он поступает аналогично предшествующему и т. д.

Может ли так случиться, что каждый сделает не меньше двух ходов?

Задача 6.12.

Имеется две кучки камней. Игра состоит в том, что каждый из двух играющих по очереди берет любое количество камней из одной кучки. Начинающий имеет право начинать игру или предоставить это право своему противнику.

Первоначально:

а) в каждой кучке по 45 камней; б) в первой кучке 30 камней, а во второй — 16 камней.

Как должен играть начинающий, чтобы забрать последний камень?

Задача 6.13.

Играют двое. Первый участник игры называет произвольное целое положительное число, не превосходящее четырех, т. е. он может назвать одно число из чисел: 1, 2, 3, 4. Второй игрок прибавляет к названному числу свое целое число, также не превосходящее четырех. К этой сумме первый прибавляет какое-либо положительное число, не превосходящее четырех, и сообщает сумму и т. д. Выигрывает тот, кто первым достигнет числа 26.

Как добиться победы?

Задача 6.14.

Играют двое. Первый участник игры называет произвольное целое положительное число, не превышающее десяти. Второй игрок прибавляет к названному числу свое целое положительное число, также не превышающее десяти, и называет сумму, к этой сумме первый прибавляет какое-либо целое положительное число, не превышающее десяти, и сообщает сумму, выигрывает тот, кто первым достигнет ста.

Как добиться победы?

Задача 6.15.

Двое играют в следующую игру: каждый игрок по очереди вычеркивает одно число из ряда 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19 до тех пор, пока не останется два числа. Если сумма этих чисел делится на 5, то выигрывает первый игрок, если не делится, то второй.

Докажите, что первый игрок имеет выигрышную стратегию.

Задача 6.16.

Двое играют в следующую игру. Каждый игрок по очереди вычеркивает 9 чисел (по своему выбору) из последовательности 1, 2, ..., 100, 101. После одиннадцати таких вычеркиваний останутся два числа. Затем второй игрок присуждает первому столько очков, какова разница между этими оставшимися числами. Докажите, что первый игрок всегда сможет набрать по крайней мере 55 очков, как бы ни играл второй.

Задача 6.17.

Двое играют в такую игру: из кучки, где имеется нечетное число предметов, каждый берет себе по очереди один или два предмета. Выигрывает тот, у кого в конце игры окажется четное количество предметов.

В каких случаях и при какой стратегии выигрывает начинающий?

В каких случаях и при какой стратегии выигрывает начинающий, если по условию задачи выигрывает тот, у кого в конце игры окажется нечетное количество предметов?

Широко известна «задача о колпаках». Обычно она формулируется в сказочной форме.

В одном сказочном государстве жил-был царь. У царя было три сына. Все царевичи были умными и красивыми. Пришло время, и состарился царь. Стал он дряхлым и немощным. Понял царь, что настала пора подумать о достойной смене, решить, кому из сыновей передать царство. Хотел царь иметь своим преемником самого мудрого из царевичей. Он призвал к себе сыновей и сказал: «Я придумал для вас испытание. Вы видите у меня в руках пять колпаков: три красных и два белых. Закройте глаза». И он надел на голову каждого сына по красному колпаку, а белые колпаки спрятал. «Можете открыть глаза,— сказал царь.— Кто отгадает, какого цвета колпак на его голове, зная цвет колпаков, надетых на его братьев, того я буду считать самым мудрым и оставлю ему в наследство все царство».

Долго стояли братья, глядя друг на друга, наконец один из них воскликнул: «На мне красный колпак». Как рассуждал царевич при определении цвета своего колпака?

Не будем спешить с решением этой задачи. Сначала сформулируем некоторое обобщение задачи в форме игры мудрецов.

Предлагается игра мудрецов, в ней участвует n человек. Перед началом игры им предъявляется k красных колпаков и δ белых колпаков ($k+\delta \geqslant n$). После этого участникам игры завязывают глаза и на голову каждого из них надевается один из колпаков. Оставшиеся колпаки прячутся. Затем участникам игры предлагается открыть глаза и определить цвет своего колпака, зная цвета колпаков, надетых на его партнеров по игре. Выигрывает тот, кто первым назовет цвет своего колпака и даст логическое объяснение тем рассуждениям, которые привели его к правильному ответу.

В связи с приведенной двуцветной формулировкой игры предлагается последовательность задач.

Задача 7.1.

Участников игры мудрецов два, а перед началом игры им предъявили три колпака: два красных и один белый. Определите, кто будет победителем, если:

1) на одного участника игры надет красный колпак, а на другого — белый;

2) на обоих участниках надеты красные колпаки.

Задача 7.2.

Участников игры мудрецов три, им предъявлены перед началом игры пять колпаков: три красных и два белых.

Определите, кто будет победителем, если:

1) на двух участников надеты белые колпаки, а на третьего — красный;

2) на одного участника надет белый колпак, а на двух других участников — красные колпаки;

3) на всех трех участников надеты красные колпаки.

Отметим, что последний случай имеет место в ранее приведенной сказочной формулировке задачи.

Задача 7.3.

Участников игры мудрецов семь, а перед началом игры им предъявлено восемь красных колпаков и четыре белых. Определите, кто будет победителем, если:

1) на них надеты четыре красных колпака и три белых;

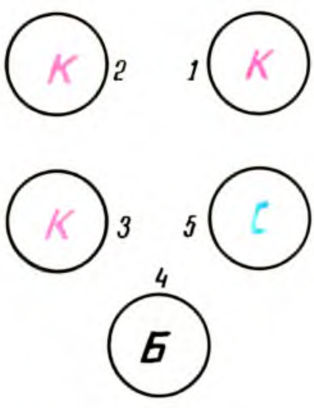
2) на них надеты шесть красных колпаков и один белый.

Игра мудрецов несколько усложняется, если в ней использовать колпаки трех цветов: красные, белые и синие. Однако в ряде случаев участники игры, владельцы колпаков двух цветов, могут исключить из рассмотрения участников игры владельцев колпаков третьего цвета. Покажем это при решении конкретной задачи.

Задача 7.4.

Участников игры мудрецов пять. Им предъявлено перед началом игры десять колпаков: шесть красных, два белых и два синих. Определите, кто будет победителем игры, если на трех участников игры надеты красные колпаки, на одного — белый и на одного — синий.

Решение задачи 7.4. Пронумеруем участников игры так, как показано на рисунке. Покажем, как четыре первых участника



могут исключить из рассмотрения участника в синем колпаке. Проведем необходимые рассуждения от имени одного из них, например третьего: «Если бы на мне был синий колпак, то первый, второй и четвертый участники видели бы перед собой два синих колпака (их всего два по условию игры) и каждый из них пришел бы к выводу, что на них не синий колпак. Это позволило бы им считать, что число участников три, на головах которых только белые и красные колпаки. При этом первый и второй участники имеют возможность определить цвет своих колпаков. Но они молчат. Значит, на мне не синий колпак».

Таким образом, игра мудрецов сводится к случаю, когда участников игры четыре, а на них надеты колпаки двух цветов: три красных и один белый. При этом победителем игры будет один из участников игры в красном колпаке, рассуждая так: «Если бы на мне был белый колпак, то два партнера по игре в красных колпаках видели бы перед собой два белых колпака и один красный. Но предъявилось только два белых колпака, и, значит, они могут прийти к выводу, что на каждом из них красный колпак. Однако они молчат. Значит, на мне не белый колпак, а красный». Отметим, что аналогично можно было исключить из рассмотрения участника в белом колпаке, но невозможно было исключить из рассмотрения участников в красных колпаках.

Задача 7.5.

Участников игры мудрецов восемь, а перед началом игры им предъявлено пятнадцать колпаков: пять красных, шесть белых и четыре синих.

Определите, кто будет победителем игры, если на них надето три красных, два белых и три синих колпака.

Сюда включены задачи, которые было нецелесообразно относить к предыдущим разделам. Их решение, как правило, требует специальных рассуждений, которые трудно классифицировать.

Широко известна задача о «волке, козле, капусте».

* Задача 8.1.

Как перевезти в лодке с одного берега на другой волка, козла и капусту, если известно, что волка нельзя оставить без присмотра с козлом, а козел «неравнодушен» к капусте. В лодке только 2 места, поэтому можно брать с собой одновременно или одно животное или капусту.

Решение задачи 8.1. Опишем организацию перевозки с левого берега на правый волка, козла и капусты, при которой без присмотра перевозчика не будут оставаться одновременно волк с козлом или козел с капустой.

В *первом рейсе* перевозчик берет с собой козла, оставляя на левом берегу волка и капусту. Переехав на правый берег, перевозчик оставляет там козла и возвращается на левый берег.

Во *втором рейсе* перевозчик берет с собой волка, оставляя на левом берегу капусту. Переехав на правый берег, перевозчик оставляет там волка, забирает с собой козла и возвращается с ним на левый берег.

В *третьем рейсе* перевозчик берет с собой капусту, оставляя на левом берегу козла. Переехав на правый берег, оставляет там капусту с волком и возвращается на левый берег.

И наконец, в *четвертом рейсе* он перевезет с левого берега на правый козла.

* Задача 8.2.

Как перевезти в лодке с одного берега на другой козла, капусту, двух волков и собаку, если известно, что волка нельзя оставлять без присмотра с козлом и собакой, собака в «ссоре» с козлом, а козел «неравнодушен» к капусте? В лодке только три места, поэтому можно брать с собой не более двух животных или одно животное и капусту.

Задача 8.3.

Жили четыре друга. Звали их Альберт, Карл, Дитрих и Фридрих. Фамилии друзей те же, что и имена, только такие, что ни у кого из них имя и фамилия не были одинаковыми. Кроме того, фамилия Дитриха не была Альберт.

Определите фамилию каждого мальчика, если известно, что имя мальчика, у которого фамилия Фридрих, есть фамилия того мальчика, имя которого фамилия Карла.

По принципу этой задачи формулируется более сложная следующая задача.

Задача 8.4. Любовь без взаимности.

Четверо юношей: Андрей, Борис, Кирилл и Дмитрий — влюблены в четырех девушек: Таню, Машу, Зину и Галю. Но это любовь без взаимности.

1) Андрей любит девушку, влюбленную в юношу, который любит Таню.

2) В Машу влюблен юноша, которого любит девушка, любимая Борисом.

3) Кирилл влюблен в девушку, которая любит Диму.

4) В каждого юношу влюблена только одна девушка, и в каждую девушку влюблен только один юноша.

5) Бориса не любит Зина.

6) Юноша, которого любит Галя, не любит Зину.

Кто в кого влюблен?

Решение следующих задач требует и логических рассуждений, и некоторых математических выкладок.

Задача 8.5.

Петя и Коля положили на стол по шесть монет: одну в 50 к., две по 20 к., три по 15 к., четыре по 5 к., одну в 3 к. и одну в 2 к.

Известно, что у Пети не было монет по 15 к., а две монеты Коли составили сумму, в 10 раз меньшую, чем его остальные монеты.

Кто из мальчиков положил монету в 50 к.?

Задача 8.6.

У школьника была некоторая сумма денег монетами достоинством в 15 и 20 к., причем двадцатикопеечных монет было больше, чем пятнадцатикопеечных. Пятую часть всех денег школьник истратил, отдав две монеты за билет в кино. Половину оставшихся денег он отдал за обед, оплатив его тремя монетами.

Сколько монет каждого достоинства было у школьника вначале?

Задача 8.7.

У Пети был один рубль монетами достоинством не более 10 к. Вася взял у Пети по одной монете каждого типа, и у Пети стало на 15 к. меньше. Сколько было у Пети монет каждого достоинства, если монет самого большого достоинства было на 4 больше, чем всех остальных монет?

Задача 8.8.

У двух братьев было стадо баранов. Они продали его и за каждого барана получили столько рублей, сколько голов было в стаде. Выручку стали делить пополам. Старшему брату — десятку, младшему брату — десятку, старшему — десятку, младшему — десятку. И так несколько раз. Потом старший взял свою десятку, а младшему несколько рублей не хватило. Тогда старший вынул из кармана нож и отдал брату в компенсацию за недостающую сумму.

Сколько стоил нож?

Задача 8.9.

Собрался Иван-царевич на бой со Змеем Горынычем, трехглавым и треххвостым. «Вот тебе меч-кладенец,— говорит ему Баба Яга.— Одним ударом ты можешь срубить либо одну, либо две головы, либо один хвост, либо два хвоста.

Запомни: срубишь голову — новая вырастет, срубишь хвост — два новых вырастут, срубишь два хвоста — голова вырастет, срубишь две головы — ничего не вырастет». За сколько ударов Иван-царевич может срубить Змею все головы и хвосты?

Задача 8.10.

Математик XIX столетия де Морган в ответ на вопрос, сколько ему лет, сказал: «Мне было x лет в x^2 году».

О жившем в XVIII столетии пфальцском курфюрсте Карле Теодоре тоже рассказывали, что ему было z лет в z^2 году.

В каком году родился де Морган, в каком — Карл Теодор?

Сколько лет профессору математики, сообщившему нам эту историю, если ему в y^2 году было y лет?

Задача 8.11.

Мастер игровых наук слишком многословен, чтобы написать доклад менее чем на шести страницах, но у него никогда не хватает времени, чтобы написать более ста страниц. Последний его доклад состоит из двух частей. Страницы, естественно, перенумерованы. И вот что любопытно: суммы номеров страниц первой и второй частей одинаковы.

Сколько страниц в докладе?

Задача 8.12.

Карл у Клары украл кораллы, когда ему было вдвое больше лет, чем было Кларе, когда она у Карла украла кларнет и когда Карл был в возрасте, в котором Клара лишилась кораллов.

Если бы кража кларнета произошла на 8 лет раньше, чем это было в действительности, то Кларе было бы в момент пропажи кораллов втрое больше лет, чем было бы ей в новый срок пропажи кларнета.

Сколько лет было Карлу, когда у него пропал кларнет?

Ответы и решения

1.2. В этой задаче речь идет о двух множествах — множестве сосудов и множестве жидкостей. Воспользуемся таблицей 4×4.

Сосуд / Жидкость	Бутылка	Стакан	Кувшин	Банка
Молоко	—	—	+	—
Квас	—	—	—	+
Лимонад	+	—	—	—
Вода	—	+	—	—

Из условия 1 задачи следует, что в бутылке не вода и не молоко, и поэтому в соответствующих клетках нужно поставить знак минус. Из условия 2 следует, что в кувшине не лимонад и не квас. Отметим это в таблице. Из условия 3 известно, что в банке не лимонад и не вода. На пересечении столбца «Банка» и строк «Лимонад» и «Вода» ставим минусы. Из условия 4 следует, что молоко не в банке и не в стакане. Для молока остается кувшин. Эти данные запишем в таблицу.

Теперь, когда все условия задачи использованы, видно, что *молоко в кувшине*, а *квас в банке*. Поэтому квас не может быть в бутылке и стакане, а вода не в кувшине. Поставим знак минус в этих клетках. При этом становится ясно, что *лимонад в бутылке*, а *вода в стакане*.

1.3. Для решения задачи воспользуемся таблицей 4×4.

Лодка / Имя	«Мотылек»	«Колибри»	«Стриж»	«Шмель»
Виктор	—	—	—	+
Олег	—	—	+	—
Петр	+	—	—	—
Борис	—	+	—	—

По условию 2 лодка «Мотылек» принадлежит Петру, и поэтому ему не принадлежат «Колибри», «Стриж» и «Шмель». Отметим это в таблице. Из условий 1 и 3 «Колибри» не принадлежит Олегу.

Из условий 1 и 4 следует, что «Колибри» не принадлежит Виктору, так как Борис не мог плыть на «Колибри» в первом и четвертом заездах. Поэтому «Колибри» принадлежит Борису. Отметим это, а также, что Борису не принадлежат «Мотылек», «Стриж» и «Шмель».

Установим, на какой лодке плыл Петр во 2 заезде. Он не мог плыть на «Мотыльке» и на «Стриже», так как плыл на них в 3 и 4 заездах. (Петр выиграл все заезды, а значит, и 4, и поэтому в 4 заезде он плыл на «Стриже», который пришел первым.)

Петр не мог во втором заезде плыть на «Колибри», так как на «Колибри» во втором заезде плыл Олег. Следовательно, Петр во втором заезде плыл на «Шмеле». «Шмель» не принадлежит Олегу, так как во втором заезде на лодке Олега плыл Виктор. Поэтому в клетке на пересечении строки «Олег» и столбца «Шмель» мы можем поставить знак минус. Тогда, очевидно, «Шмель» принадлежит Виктору, а «Стриж» — Олегу.

1.5. Воспользуемся тремя таблицами 3×3.

Город / Фамилия	Таллинн	Тверь	В. Волочек
Андреев	—	+	—
Борисов	—	—	+
Воронов	+	—	—

Вид спорта / Фамилия	Футбол	Баскетбол	Волейбол
Андреев	+	—	—
Борисов	—	+	—
Воронов	—	—	+

Факультет / Город	Исторический	Физико-математический	Иностранных языков
Таллинн	+	—	—
Тверь	—	—	+
В. Волочек	—	+	—

Из первого условия следует, что на пересечении строки «Андреев» и столбца «В. Волочек», а также в клетке «Борисов — Тверь» надо поставить знак минус.

Из второго условия следует, что в клетке «В. Волочек — исторический» третьей таблицы следует поставить знак минус.

Из третьего условия следует, что в клетке «Тверь — иностранный язык» третьей таблицы следует поставить знак плюс. Но тогда студенты из Таллинна и В. Волочка не могут учиться на факультете иностранных языков. Кроме того, студент из Твери не учится на историческом и физико-математическом факультетах. Поставим знак минус в соответствующих клетках. Но тогда, очевидно, что таллиннец учится на историческом, а студент из В. Волочка — на физико-математическом.

По четвертому условию Воронов учится на историческом факультете, и поэтому Воронов из г. Таллинна, а Андреев и Борисов живут в другом городе. Отметим это в таблице. Воронов не житель Твери и В. Волочка. В этих клетках можно поставить знак минус. Тогда, очевидно, что Борисов живет в В. Волочке, а Андреев — в Твери. Первая таблица заполнена.

По условию 3 тверянин увлекается футболом. Но тверянином является студент факультета иностранных языков Андреев. Значит, Андреев увлекается футболом, и поэтому в соответствующей клетке второй таблицы поставим знак плюс и отметим, что Андреев не играет в баскетбол и волейбол, а Борисов и Воронов не увлекаются футболом.

Наконец, студент физико-математического факультета не любит волейбола. Этот студент — житель В.Волочка, т. е. Борисов. Во второй таблице ставим знак минус в строке «Борисов» и столбце «Волейбол». Таблица легко заполняется до конца.

1.6. Воспользуемся таблицей 4×8.

Инструмент, язык / Имя	Виолончель	Рояль	Гитара	Скрипка	Английский	Французский	Немецкий	Испанский
Маша	—			—	—	—		
Люда	—			—	—	—		
Женя	+	—	—	—	—	+	—	—
Катя	—	—	—	+	+	—	—	—

Согласно условию 2 поставим знак минус на пересечении строки «Люда» и столбцов «Скрипка», «Виолончель», «Английский язык».

Согласно условию 3 отметим в таблице, что Маша также не играет на этих инструментах и не знает английского языка.

Согласно условию 4 отметим, что Женя знает французский язык, знаком плюс и, что не играет на скрипке, знаком минус. Поставим также знаки минус напротив Жени и языков: английского, немецкого и испанского. Если Женя знает французский, следовательно, Маша, Люда и Катя не знают его. Поставим знак минус в соответствующих клетках.

Из таблицы теперь видно, что Катя играет на скрипке и знает английский (знак плюс). Следовательно, она не играет на виолончели, рояле и гитаре. Поставим знак минус в этих клетках. А также отметим знаком минус, что Катя не владеет французским, немецким и испанским языками.

Из таблицы видно, что на виолончели играет Женя. Поставим плюс в этой клетке и то, что она не играет на рояле и гитаре, обозначим знаком минус.

Теперь возможны два варианта и, следовательно, два решения задачи:

I вариант. Маша играет на рояле, а Люда — на гитаре. Но тогда по условию 1 Люда говорит по-испански, и, значит, Маша говорит по-немецки.

II вариант. Маша играет на гитаре, а Люда — на рояле. Тогда Маша говорит по-испански, а Люда — по-немецки.

1.7. Воспользуемся таблицей 4×16.

С целью упрощения записи решения задачи будем обозначать клетки таблицы буквами Z_{ij}, где i — номер столбца таблицы, а j — номер ее строки. Например, Z_{51} обозначает клетку из пятого столбца первой строки. Знак плюс в ней означает, что Еремин отдыхал во второй год в мае.

По условию задачи мы поставим знак плюс в клетках Z_{33}, Z_{51}, Z_{83}, $Z_{10\,4}$, $Z_{15\,2}$.

Так как Дементьев в первый год отдыхал в июле, во второй год — в августе, то в третий год он мог отдыхать или в мае, или в июне. Но в июне третьего года отдыхал Барклая. Значит, Дементьев в третий год отдыхал в мае и, следовательно, в четвертый год в июне. Поэтому знак плюс следует поставить в клетках Z_{93} и $Z_{14\,3}$.

Так как в четвертый год Фомин отдыхал в июле, то в третий год он мог отдыхать или в мае, или в июне, или в августе, но в третий год в мае отдыхал Дементьев, а в июне — Барклая. Значит, Фомин в третий год отдыхал в августе. При этом ясно, что в июле третьего года отдыхал Еремин. Следовательно, нужно поставить знак плюс в клетки $Z_{11\,1}$ и $Z_{12\,2}$.

В четвертый год в июне отдыхал Дементьев, а в июле — Фомин. Но тогда Еремин мог отдыхать или в мае, или в августе. Но его отпуск на май пришелся во втором году. Значит, в четвертый год Еремин отдыхал в августе, но тогда Барклая в этом же году отдыхал в мае, и мы должны поставить знак плюс в клетки $Z_{13.4}$, $Z_{16.1}$.

При этом ясно, что Еремин в первый год отдыхал в июне, но тогда Фомин в первый год мог отдыхать только в мае, а Барклая — в августе. Теперь очевидно, как расставляется знак плюс во втором году. Ответ на вопрос, поставленный в задаче, дается таблицей.

Год / Фамилия		1-й				2-й				3-й				4-й			
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
		Май	Июнь	Июль	Авг.	Май	Июнь	Июль	Авг.	Май	Июнь	Июль	Авг.	Май	Июнь	Июль	Авг.
1	Еремин	—	+	—	—	+	—	—	—	—	—	+	—	—	—	—	+
2	Фомин	+	—	—	—	—	+	—	—	—	—	—	+	—	—	+	—
3	Дементьев	—	—	+	—	—	—	—	+	+	—	—	—	—	+	—	—
4	Барклая	—	—	—	+	—	—	+	—	—	+	—	—	+	—	—	—

1.8. Воспользуемся таблицей 4×8.

Профессия, литература / Фамилия		1	2	3	4	5	6	7	8
		Историк	Поэт	Драматург	Прозаик	Историческая	Стихи	Пьеса	Проза
1	Алексеев	—	+	—	—	—	—	+	—
2	Борисов	+	—	—	—	—	—	—	+
3	Константинов	—	—	+	—	+	—	—	—
4	Дмитриев	—	—	—	+	—	+	—	—

По условию задачи Борисов — историк, он не читал исторической книги и пьесу (поэт читал пьесу). Поэтому в клетке Z_{12} поставим знак плюс, а в клетках Z_{11}, Z_{13}, Z_{14}, Z_{22}, Z_{32}, Z_{42}, Z_{52}, Z_{72} поставим знак минус.

Прозаик не читал исторической книги, не читал прозу, не читал пьесу. Значит, прозаик читал стихи. Отсюда следует, что историк Борисов не читал ни исторической книги, ни стихов, ни пьесы, а поэтому он читал прозу (роман). Но историк читал книгу Дмитриева, следовательно, Дмитриев — прозаик. Поэтому знак плюс следует поставить в клетках Z_{44} и Z_{82}, а знак минус — в клетках Z_{62}, Z_{81}, Z_{83}, Z_{84}, Z_{41}, Z_{43}, Z_{34}, Z_{24}.

Дмитриев не читает исторических книг. Борисов и Алексеев не могли для обмена иметь историческую книгу. Но тогда историческую книгу читал Константинов. Поэтому поставим плюс в клетке Z_{53} и минус в клетках Z_{51}, Z_{54}, Z_{63}, Z_{73}.

Ясно, что Константинов не историк, не прозаик и не поэт (поэт читал пьесу). Значит, Константинов — драматург. Это позволяет заполнить таблицу до конца таким образом: Алексеев — поэт и читал пьесу, Борисов — историк и читал роман, Константинов — драматург и читал историческую книгу, Дмитриев — прозаик и читал стихи.

1.9. Для решения задачи воспользуемся таблицей 4×4.

Профессия / Язык	Физик	Историк	Биолог	Математик
Русский	—	+	—	—
Английский	—	—	+	+
Французский	+	—	+	—
Итальянский	+	+	—	+

Учтем, что между множеством ученых и множеством языков, которыми владеют ученые, взаимно однозначного соответствия нет.

Запишем в таблицу данные, которые непосредственно вытекают из условия задачи: физик не говорил по-английски (знак минус в клетке «Физик — английский»), историк говорил по-русски (плюс в клетке «Историк — русский») и, значит, не говорил по-французски (минус в клетке «Историк — французский»), математик не знает русского языка (минус в таблице). Так как биолог не мог говорить с историком без переводчика, то он не знал русского языка. Поставим минус в соответствующей клетке.

Установим язык, на котором могли разговаривать сразу трое ученых. Это не может быть русский язык, так как русским языком не владеют биолог и математик. Это не может быть английский язык, так как им не владеет физик, и если бы им владели одновременно историк, биолог и математик, то историк и биолог обходились бы при разговоре без переводчика.

Если теперь предположить, что таким языком является французский, то на нем должны говорить физик, биолог и математик. Но по условию задачи они не могут беседовать на одном языке втроем. Следовательно, языком, на котором могли разговаривать сразу трое ученых, является итальянский и говорят на нем физик, историк и математик. Действительно, физик, биолог и математик не говорят на одном языке, а историк и биолог не обходятся без переводчика. Поэтому можно поставить знак плюс напротив итальянского и физика, историка, математика соответственно.

Теперь из таблицы видно, что историк не владеет английским языком. При этом ясно, что физик может быть переводчиком в разговоре историка с биологом только в случае, если биолог и физик владеют французским языком (биолог не знает русского и итальянского, а физик не знает английского).

Но если физик знает французский язык, то он не владеет русским.

И наконец, математик не знает французского языка, так как в противном случае физик, биолог и математик говорили бы на одном языке. Поэтому математик владеет английским языком. Теперь можно проставить плюсы и минусы в соответствующие клетки таблицы.

Следовательно, физик владеет французским и итальянским языками, историк — русским и итальянским, биолог — английским и французским, математик — английским и итальянским.

1.10. Воспользуемся таблицей 4×4.

Язык / Имя	Турецкий	Армянский	Персидский	Греческий
Салал	—	+	—	+
Абдул	—	+	+	—
Мохаммед	+	—	—	+
Юсуф	—	—	+	+

Так как по условию задачи Мохаммед хорошо говорил на турецком языке, а Абдул — на персидском, то отметим это знаком плюс в соответствующих клетках таблицы. Так как ни один из четырех не владел одновременно турецким и армянским языками, то Мохаммед не мог говорить на армянском (знак минус). Так как Абдул и Мохаммед в разговоре пользовались переводчиком, то Абдул не знал турецкого языка, а Мохаммед — персидского. Отметим это в таблице знаком минус. Салал не знал персидского языка, и поэтому в этой клетке поставим знак минус. Учитывая, что Мохаммед знает два языка, можно сделать вывод, что Мохаммед владеет греческим языком (знак плюс). При этом ясно, что Абдул не должен знать греческого языка (знак минус) и, следовательно, владеет армянским (знак плюс).

Выясним, какими языками пользовался Салал, будучи переводчиком у Абдула и Мохаммеда. Среди них не может быть персидский (Салал его не знает), это не могут быть одновременно турецкий и армянский, так как никто не владел одновременно этими языками. Следовательно, Салал владел армянским и греческим языками и не владел турецким языком. Поставим соответствующие знаки в таблице. Юсуф не знал турецкого языка, но свободно разговаривал с Мохаммедом. Языком их общения мог быть только греческий язык. Поэтому Юсуф владел греческим. Он не мог говорить на армянском языке, иначе Салал, Абдул и Юсуф говорили бы на одном языке. Значит, вторым языком, на котором говорил Юсуф, был персидский.

1.11. Для решения задачи составим таблицу 5×5 вида:

Номер дома	1	2	3	4	5
Цвет дома					
Национальность владельца дома					
Животное					
Напиток					
Сигареты					

По условию 10 *норвежец живет в первом доме.*

По условию 15 норвежец живет рядом с голубым домом. Значит, *второй дом голубой.*

Докажем, что *первый дом оранжевого цвета.* Действительно, он не голубой, так как голубой дом второй, он не красный, так как по условию 2 в красном доме живет англичанин, он не зеленый, так как по условию 6 зеленый дом стоит правее белого и поэтому он не может быть первым. Первый дом не может быть белым, так как справа от белого дома стоит зеленый (по условию 6), а по доказанному справа от первого дома стоит голубой.

По условию 8 в первом доме курят сигареты «Спорт». Докажем, что в *первом доме пьют воду.* Действительно, в нем не пьют водку, так как по условию 5 водку пьет австриец. В нем не могут пить молоко, так как молоко пьют в среднем доме (условие 9). В нем не могут пить кофе, так как по условию 4 кофе пьют в зеленом доме. В нем не могут пить апельсиновый сок, так как по условию 13 его пьет курящий сигареты «Столичные», а в первом доме курят сигареты «Спорт».

По условию 9 *в третьем доме пьют молоко.*

По условию 12 *во втором доме живет хозяин лошади.*

Установим, в каком порядке расположены красный, белый и зеленый дома. Так как по условию 9 в третьем доме пьют молоко, а в зеленом доме по условию 4 пьют кофе, то зеленый дом не третий. Предположив, что третий дом не красный, а белый, мы придем к противоречию. Следовательно, *третий дом красный,* а в нем по условию 2 *живет англичанин.* Но тогда с учетом условия 6 *четвертый дом белый,* а *пятый дом зеленый.*

По условию 4 *в пятом доме пьют кофе.* Выясним, что пьют в четвертом и втором домах. Возможны два случая: 1) Водку пьют во втором доме, а апельсиновый сок — в четвертом. 2) Водку пьют в четвертом доме, а апельсиновый сок — во втором.

Можно доказать, что второй случай приводит к противоречию. Значит, *во втором доме пьют водку,* а в *четвертом доме пьют апельсиновый сок.* Из последнего с учетом условия 13 следует, что *хозяин четвертого дома курит сигареты «Столичные»,* а *хозяин второго дома — австриец.*

В четвертом и пятом домах живут японец и испанец. Но в четвертом доме курят сигареты «Столичные», а по условию 14 японец курит сигареты «Кент». Значит, *японец живет в пятом доме,* а *испанец — в четвертом доме.*

По условию 14 в пятом доме курят сигареты «Кент».

По условию 3 в четвертом доме немецкая овчарка.

По условию 7 тот, кто курит сигареты «Золотое руно», разводит улиток. Это может делать только владелец третьего дома, так как в первом, четвертом, пятом домах курят сигареты соответственно «Спорт», «Столичные», «Кент», а во втором доме содержится лошадь. Теперь видно, что во втором доме курят сигареты «Прима», а по условию 11 сосед курящего сигареты «Прима» является владельцем лисы, ясно, что владелец лисы живет в первом доме, и, следовательно, зебра живет в пятом доме.

Полное описание решения задачи видно из нижеприведенной таблицы:

Номер дома	1	2	3	4	5
Цвет дома	Оранжевый	Голубой	Красный	Белый	Зеленый
Национальность	Норвежец	Австриец	Англичанин	Испанец	Японец
Животные	Лиса	Лошадь	Улитки	Немецкая овчарка	Зебра

Напиток	Вода	Водка	Молоко	Апельсиновый сок	Кофе
Сигареты	«Спорт»	«Прима»	«Золотое руно»	«Столичные»	«Кент»

1.12. Из информации о размещении мушкетеров в харчевне «Голубой павлин», о начале дуэли у «Голубого павлина» и ее продолжении около монастыря Дешо следует:

1) Титулы д'Эстрэ и Ла Коста не граф и не герцог, титулы Вьевиля и Пьютанжа не виконт и не маркиз, а титулы Бюзаньи и Монтерана не граф и не шевалье.

2) Гербы Бюзаньи и Монтерана не содержат изображений оленя и льва, гербы Вьевиля и Пьютанжа не содержат изображений вепря и волка, а гербы д'Эстрэ и Ла Коста не содержат изображений вепря и медведя. Кроме того, на гербе д'Эстрэ не изображена лисица.

3) Гербы виконта и маркиза не содержат изображений вепря и волка, на гербе графа не изображены ни олень, ни лев, ни вепрь, ни медведь, на гербе герцога не изображены ни вепрь, ни медведь, на гербе барона не изображены ни лисица, ни медведь, а герб шевалье не содержит изображений оленя и льва. Наконец, титул Ла Коста не маркиз. Это следует из того, что визави Ла Коста в «Голубом павлине» был мушкетер, на эмблеме которого был изображен вепрь, и этот мушкетер впоследствии дрался с маркизом.

Будем обозначать имена мушкетеров, их гербы и титулы начальными буквами (а при необходимости несколькими начальными буквами). Воспользуемся тремя таблицами 6×6, связывающими имена и титулы, имена и гербы, титулы и гербы, и заполним их, используя условие задачи:

Титул / Имя	в.	м.	гр.	гер	б.	ш.
Э.			—	—	—	
Л.		—	—	—		
В.	—	—				
Б.			—			—
П.	—	—				
М.			—			—

Герб / Имя	о.	лев	лис	вепрь	волк	м
Э.			—	—		—
Л.				—		—
В.				—	—	
Б.	—	—				
П.				—	—	
М.	—	—				

Герб / Титул	о.	лев	лис	вепрь	волк	м.
в.				—	—	
м.				—	—	
гр.	—	—		—		—
гер.				—		—
б.			—			—
ш.	—	—				

Ясно, что графом может быть или Вьевиль, или Пьютанж, а граф в своем гербе может иметь изображение или лисицы, или волка. Но Пьютанж и Вьевиль не имеют в своем гербе изображения волка. Значит, граф имеет в изображении своего герба лисицу. Аналогично доказывается, что барон в изображении его герба имеет вепря.

Так как графом может быть или Вьевиль, или Пьютанж, а вепрь может быть изображен или на гербе Бюзаньи, или на гербе Монтерана, то в расположении мушкетеров в харчевне «Голубой павлин» может быть восемь вариантов. Однако условия задачи с учетом последовательности поединков мушкетеров дают пять решений задачи, которые можно записать в виде следующей таблицы на с. 71.

Отсюда ясно, что формулировка задачи не позволяет кардиналу сделать объективный доклад королю.

2.2. Из условия 3 задачи следует, что в строю мальчики стояли в следующем порядке: сначала Д, потом Л, а за ним А.

Из условий 1 и 2 следует, что Б стоял после А, а за Б через одного стоит К.

Из условия 5 следует, что Г впереди Д, так как Б стоит за А и, следовательно, за Д.

И наконец, из условия 6 следует, что Е стоит рядом с К, причем слева от К. Если бы Е стоял справа от К, то он был бы впереди В (как и требует условие 6), но при этом нарушилось бы условие 4 (В стоял бы после Е, но не через одного, а рядом с ним).

Таким образом, мальчики выстроились в следующем порядке: Г, Д, Л, А, Б, Е, К, В.

2.3. Нужно упорядочить множество, состоящее из элементов А, Б, В, Г, Д, Е.

Имя, титул, герб / Вариант решений	д'Эстрэ		Ла Кост		Вьевиль		Бюзаньи		Пьютанж		Монтеран	
	титул	герб	титул	герб	титул	герб	титул	герб	титул	герб	титул	герб
1	виконт	олень	шевалье	волк	герцог	лев	барон	вепрь	граф	лисица	маркиз	медведь
2	маркиз	лев	шевалье	волк	граф	лисица	барон	вепрь	герцог	олень	виконт	медведь
3	шевалье	волк	виконт	олень	граф	лисица	маркиз	медведь	герцог	лев	барон	вепрь
4	маркиз	лев	виконт	олень	шевалье	медведь	герцог	волк	граф	лисица	барон	вепрь
5	шевалье	волк	виконт	лев	граф	лисица	маркиз	медведь	герцог	олень	барон	вепрь

Из первого условия задачи следует, что команды А, Б, Д расположены так: впереди Д, за Д идет Б, а за Б следует команда А.

Далее команда Е опередила Б, но отстала от Д. Значит, команда Е расположена между командами Д и Б.

Остается выяснить расположение команд Г и В. Так как А отстала от Б на три места, то команды В и Г должны быть расположены между командами Б и А. Так как команда В находится между Г и Д, то команда В идет после команды Б, а команда Г — после команды В, но впереди команды А.

2.4. Установим возраст Бори. Ясно, что в детский сад ходит пятилетний ребенок. И по условию задачи это девочка. Значит, Боре больше пяти лет.

Так как Аня старше Бори, то Боре не может быть 15 лет. Сумма лет Ани и Веры делится на 3. С учетом возраста детей в семье это возможно в двух случаях:

1) Одной девочке 5 лет, а другой — 13 лет.

2) Одной девочке 8 лет, а другой — 13 лет.

В обоих случаях одной девочке 13 лет. Следовательно, Боре не 13 лет.

Итак, Боре не 5 лет, не 13 лет и не 15 лет. Значит, Боре 8 лет.

Теперь установим возраст каждой девочки. Сумма лет Ани и Веры делится на три, и это возможно в случае, когда одной девочке 5 лет, а другой — 13 лет. Но по условию задачи Аня старше Бори. Поэтому Ане 13 лет, Вере 5 лет. При этом Гале 15 лет.

2.5. Обозначим количество рыбы, выловленной Леней, Димой, Колей и Аликом, соответственно через л, д, к, а. Тогда по условию задачи имеем:

$$\text{а} > \text{к}, \qquad (1)$$
$$\text{л} + \text{д} = \text{к} + \text{а}, \qquad (2)$$
$$\text{л} + \text{а} < \text{д} + \text{к}. \qquad (3)$$

Вычитая из равенства (2) неравенство (3), получим $\text{д} - \text{а} > \text{а} - \text{д}$, т. е. $2\text{д} > 2\text{а}$, или

$$\text{д} > \text{а}. \qquad (4)$$

Вычитая из неравенства (3) равенство $\text{к} + \text{а} = \text{л} + \text{д}$, получим $\text{л} - \text{к} < \text{к} - \text{л}$, или $2\text{л} < 2\text{к}$, т.е.

$$\text{л} < \text{к}. \qquad (5)$$

Неравенства (4), (1) и (5) дают $\text{д} > \text{а} > \text{к} > \text{л}$. Отсюда следует, что больше всех поймал рыбы Дима, за ним следует Алик, за Аликом следует Коля, а меньше всех поймал Леня.

2.6. Естественно, до разбивки участников катания на пары построить их по росту. Изобразим такое построение цепочкой кружков с инициалами участников катания. Учитывая условия задачи, получим цепочку:

Из этой цепочки ясно, что:

1) Юра Воробьев должен кататься с Люсей Егоровой, иначе Люся Егорова останется без партнера, рост которого выше роста Люси;

2) Андрей Егоров должен кататься с Олей Петровой, иначе Оля останется без соответствующего партнера;

3) Сережа Петров должен кататься с Инной Крымовой, в противном случае он будет кататься с Аней Воробьевой, а Инна Крымова должна будет кататься со своим братом Димой Крымовым, что противоречит условию задачи;

4) наконец, Дима Крымов должен кататься с Аней Воробьевой.

2.8. Будем изображать место каждого мальчика за круглым столом в виде овала. Тогда условие задачи можно изобразить в виде следующей схемы:

Отсюда видно, что иркутянином может быть либо Витя, либо Коля. Но Коля никогда не был в Иркутске. Значит, иркутянин — Витя, а Коля — пермяк, Юра не пермяк и не иркутянин. Кроме того, по условию задачи он никогда не бывал ни в Москве, ни в Курске. Значит, Юра живет в Туле. Так как по условию задачи курянин с Толей регулярно переписываются, то Толя не курянин и, значит, Толя живет в Москве, а Леша — в Курске.

2.10. Ясно, что в компании четырех супружеских пар жены за день выпили 14 стаканов лимонада, а их мужья — 30 стаканов.

Пусть мужья Анны, Марии, Софьи и Дарьи выпили соответственно в a, m, c и d раз стаканов лимонада больше, чем их жены. Тогда из условия задачи следует равенство

$$2a+3m+4c+5d=30. \tag{1}$$

Легко показать, что $d=1$, $c\leqslant 2$, $m\leqslant 3$, $a\leqslant 4$. Например, если $d=2$, то сумма $2a+3m+4c\geqslant 21$, а из равенства (1) следует, что она равна 20, и исходное равенство не выполняется. Так как $d=1$, а $c\leqslant 2$, то $c=2$. Аналогично $m=3$, $a=4$. Значит, Андреев — муж Дарьи, Борисов — муж Софьи, Васильев — муж Марии, а Груздев — муж Анны.

2.11. Для упорядочения множеств отцов и детей, указанных в задаче, будем изображать кабины «колеса обозрения» в виде прямоугольников и в них вписывать имена детей и отцов.

Первые данные задачи позволяют изобразить их так:

1) Леня — сын ...
Алексей Иванович — отец ...

2) Андрей — сын ...
... — отец Коли

3) Тима — сын ...
... — отец Андрея

4) Коля — сын ...
... — отец ...

Кроме того, известно, что Федор Семенович катался с сыном Валентина Петровича, а Валентин Петрович — с сыном Алексея Ивановича. Так как Алексей Иванович — отец не Лени, не Коли, не Андрея, то он отец Тимы. Но тогда ясно, что с Колей катался отец Лени.

Так как Тима — сын Алексея Ивановича, то с Тимой катался Валентин Петрович. Но тогда Валентин Петрович — отец Андрея.

Так как Федор Семенович катался с сыном Валентина Петровича, то он катался с Андреем и, значит, он отец Коли. Теперь ясно, что Коля — сын Федора Семеновича.

Решение задачи можно записать в форме:

Леня — сын Григория Аркадьевича
Алексей Иванович — отец Тимы

Тима — сын Алексея Ивановича
Валентин Петрович — отец Андрея

Андрей — сын Валентина Петровича Федор Семенович — отец Коли

Коля — сын Федора Семеновича Григорий Аркадьевич — отец Лени

3.2. Шахматист, занявший второе место, мог набрать не более шести очков. Шахматисты, занявшие четыре последних места, вместе набрали не менее шести очков (играя только между собой, они в сумме набирают шесть очков). Следовательно, шахматист, занявший второе место, набрал шесть очков, а шахматисты, занявшие последние четыре места, не выиграли ни одного очка у шахматистов, занявших более высокие места. Значит, шахматист, занявший третье место, выиграл у шахматиста, занявшего седьмое место.

3.3. Для решения задачи используем турнирную таблицу.

Игрок	А	Б	В	Г	Д	очки	место
А		0,5	0,5	0,5	0,5		
Б	0,5		1				
В	0,5	0					
Г	0,5				1		
Д	0,5			0			

По условию задачи в столбце и в строке участника турнира А мы должны поставить в каждой клетке по 0,5 очка. Далее, так как В проиграл Б, то на пересечении третьего столбца второй строки ставим 1, а на пересечении второго столбца третьей строки ставим 0. Так как Г выиграл у Д, то на пересечении пятого столбца четвертой строки ставим 1, а на пересечении четвертого столбца пятой строки — 0.

Из результатов игр, внесенных в таблицу, и других условий задачи видим, что А набрал 2 очка, Б — не менее 2, В — не менее 0,5 очка, но не более 2,5 очков, Г — не менее 2,5 очков, а Д — не более 1,5 очка. Из этого ясно, что А не мог занять первое и второе места (у него очков не больше, чем у Б и Г). Он также не мог занять четвертое место (Г выиграл у занявшего четвертое место, а с А он сыграл вничью). И наконец, А не занимает пятое место (Д имеет меньше очков, чем А). Следовательно, А занял третье место.

Выясним, кто из игроков занял пятое место. Это не А (он на третьем месте), это не Б (он сыграл вничью с занявшим первое и последнее места), это не В (Б у В выиграл), это не Г (по количеству очков он на месте выше третьего). Следовательно, на пятом месте Д и он сыграл вничью с Б.

Установим игрока, занявшего четвертое место. Так как Г выиграл у Д и у занявшего четвертое место (с А у Г ничья), то четвертое место занял либо Б, либо В. Но у Б очков не меньше, чем у А, и, следовательно, четвертое место занял В. Значит, В проиграл Г.

Чтобы В опередил по очкам Д, занявшего пятое место, нужно, чтобы В выиграл у Д.

Таким образом, останется выяснить, как сыграли Б и Г и какие места они заняли. Так как Б сыграл вничью с занявшим первое место, то он не на первом месте. Количество очков, набранное им, не менее 2,5, т. е. он опередил А и поэтому Б на втором месте.

Следовательно, на первом месте Г с суммой очков 3.

Таким образом, первое место занял Г, второе — Б, третье — А, четвертое — В, пятое — Д, а заполненная турнирная таблица имеет вид:

Игрок	А	Б	В	Г	Д	очки	место
А		0,5	0,5	0,5	0,5	2	III
Б	0,5		1	0,5	0,5	2,5	II
В	0,5	0		0	1	1,5	IV
Г	0,5	0,5	1		1	3	I
Д	0,5	0,5	0	0		1	V

3.4. Всего в турнире разыгрывалось 10 очков. У А не более трех очков (у него есть один проигрыш), но не может быть и меньше трех очков, иначе должно быть: у А — 2,5, у Б — 2, у В — 1,5, у Г — 1, у Д — 0,5 и их сумма 7,5, а этого быть не может, так как всего разыграли 10 очков.

Из доказанного следует, что: у Б — 2,5, у В — 2, у Г — 1,5, у Д — 1, а сумма всех очков $3+2{,}5+2+1{,}5+1=10$.

Так как из четырех возможных очков А имеет три, то все три партии он выиграл. Но Б не проиграл ни одной партии, значит, А выиграл у В, Г и Д, а проиграл Б.

Б не проиграл ни одной партии и одну выиграл. Следовательно, в трех остальных партиях он набрал 1,5 очка (всего у него 2,5 очка). Это возможно, если все эти партии он сыграл вничью.

В данном положении возможны два варианта:

1. В должен набрать 1,5 очка в двух партиях. Если он выиграл у Г и сыграл вничью с Д, то Г должен выиграть у Д, чтобы

набрать в итоге 2 очка. Это соответствует распределению очков.

2. Если В выиграл у Д и сыграл вничью с Г, то Г должен сыграть с Д вничью. Этот вариант отпадает, так как тогда Г все партии сыграл вничью, чтобы набрать 1,5 очка, а это противоречит заявлению Д.

Следовательно, имеем только первый вариант.

3.6. Данные из условий задачи занесем в турнирную таблицу:

Команда	Динамо	Спартак	Труд	Шахтер	Очки	Мячи
Динамо					5	
Спартак						
Труд				2:1	3	5
Шахтер			1:2		1	

Так как всего в турнире разыгрывалось 12 очков, то команда «Спартак» набрала 3 очка. Кроме того, ясно, что команда «Шахтер» не выиграла ни одного матча и только один матч сыграла вничью, команда «Труд» выиграла один матч и один свела вничью, а команда «Динамо» выиграла два матча и один свела вничью.

Установим, что команда «Спартак» все три матча сыграла вничью. Действительно, если бы команда «Спартак» один матч выиграла, а один свела вничью, то она должна была бы забить хотя бы один гол. Не менее двух голов для двух побед должна забить команда «Динамо». В матче «Труд» — «Шахтер» забито три гола. Но известно, что «Труд» забил всего пять голов. Следовательно, три гола команда «Труд» забила в матчах с командами «Динамо» или «Спартак», проиграв один матч, а другой сведя вничью. При этом ей также забили не менее трех голов. Таким образом, если бы команда «Спартак» один матч выиграла, то в турнире было бы забито 12 мячей, что противоречит условию задачи. Следовательно, команда «Спартак» все матчи сыграла вничью. При этом команда «Динамо» выиграла матчи у команд «Труд» и «Шахтер».

Установим теперь соотношение забитых и пропущенных мячей в каждом матче.

Очевидно, что команда «Динамо» выиграла матчи с командами «Труд» и «Шахтер» со счетом 1 : 0, а команда «Спартак» матчи с командами «Динамо» и «Шахтер» сыграла вничью со счетом 0 : 0. В противном случае количество забитых в турнире мячей было бы больше одиннадцати. И наконец, матч «Спартак» — «Труд» окончился со счетом 3 : 3.

Команда	Динамо	Спартак	Труд	Шахтер	Очки	Мячи
Динамо		0:0	1:0	1:0	5	2:0
Спартак	0:0		3:3	0:0	3	3:3
Труд	0:1	3:3		2:1	3	5:5
Шахтер	0:1	0:0	1:2		1	1:3

3.7. Воспользуемся турнирной таблицей и будем заполнять ее по ходу рассуждений.

Команда	Север	Юг	Восток	Запад	Очки	Место
Север		2	0	2	4	I
Юг	0		2	1	3	II-III
Восток	2	0		0	2	IV
Запад	0	1	2		3	II-III

По условию задачи «Север» занял первое место, проиграв последний матч «Востоку». Максимальное число очков, которое могла набрать команда в этом матче, равно шести.

«Север» набрал не более четырех очков. Но он не мог набрать и меньше четырех очков, так как уже при трех очках нашлась бы команда с не меньшим числом очков, чем у «Севера». Следовательно, команда «Север» выиграла у команд «Юг» и «Запад».

Известно, что «Восток», выиграв у «Севера», не улучшил своего турнирного положения. В каком случае это могло быть? Если бы «Восток» до последней встречи имел не менее двух очков, то после выигрыша у «Севера» он оказался бы победителем или разделил бы первое место с «Севером», т. е. улучшил бы свое турнирное положение.

Если бы «Восток» до последней встречи имел одно очко, то после победы над «Севером» он имел бы три очка и это давало ему право на второе место, т. е. улучшило его турнирное положение. Так как «Восток» не улучшил своего турнирного положения, то он перед последней встречей имел ноль очков и, следовательно, его встречи с «Югом» и «Западом» закончились для «Востока» поражением.

Однако турнирное положение команд «Север» и «Восток» зависело и от встречи «Запада» и «Юга». При выигрыше одной из них, например «Юга», первое и второе места делили бы «Север» и «Юг», а третье и четвертое места делили бы «Запад» и «Восток». Турнирное положение команды «Восток» не меняется, если «Юг» и «Запад» сыграли вничью.

3.8. Записывать результаты матчей будем в таблицу, в которой учитывается, что каждая пара команд играла дважды.

Команда	Метеор		Комета		Ракета		Очки	Мячи
Метеор					1:1		6	9:1
Комета							5	5:1
Ракета	1:1						1	1:13

Из условий задачи ясно, что «Метеор» в четырех играх набрал шесть очков из восьми, и при этом известно, что один матч с «Ракетой» сыгран вничью. Но тогда можно утверждать, что команда «Метеор» выиграла два матча из шести (один у команды «Ракета» и один у команды «Комета») и два матча свела вничью (с командой «Ракета», и с командой «Комета»).

Команда «Комета», имея пять очков, очевидно, выиграла два матча у команды «Ракета» и свела вничью один матч с командой «Метеор».

Команда «Ракета» имеет одно очко. Следовательно, у нее единственная ничья с командой «Метеор» со счетом 1:1, остальные матчи она проиграла с «сухим» счетом.

Установим соотношение забитых и пропущенных мячей командами в каждом матче. Так как в четырех матчах команды «Ракета» с командами «Метеор» и «Комета» ей в ворота забито тринадцать мячей из четырнадцати мячей, забитых командами «Метеор» и «Комета» во всех матчах, то в играх между командами «Метеор» и «Комета» забит только один мяч. Последнее обстоятельство означает, что этот мяч забит в матче между командами «Метеор» и «Комета», в котором победила команда «Метеор», и, следовательно, счет в этом матче 1 : 0. Но тогда второй матч между командами «Метеор» и «Комета» окончился вничью со счетом 0 : 0.

Во втором матче между командами «Метеор» и «Ракета» (первый окончился вничью со счетом 1 : 1) «Метеор» победил с «сухим» счетом, используя все оставшиеся у него мячи. Значит, счет в этом матче был 7 : 0.

И наконец, в двух матчах команды «Комета» с командой «Ракета» командой «Комета» одержаны победы с «сухим» счетом и в обоих матчах в сумме забито 5 мячей. Но по условию задачи два матча турнира завершились с одинаковым счетом. Это возможно, если один из матчей команд «Комета» и «Ракета» закончился со счетом 1 : 0. Следовательно, второй матч между этими командами окончился со счетом 4 : 0.

В результате турнирная таблица будет иметь вид:

Команда	Метеор		Комета		Ракета		Очки	Мячи
Метеор			0:0	1:0	1:1	7:0	6	9:1
Комета	0:0	0:1			1:0	4:0	5	5:1
Ракета	1:1	0:7	0:1	0:4			1	1:13

3.9. Так как команда «Старт» набрала 6 очков в трех играх, то она одержала победы во всех трех матчах.

Так как остальные матчи окончились со счетом 2 : 0, 1 : 1, 2 : 2, 3 : 1, 5 : 3, то в шести матчах победой окончились 4 матча (три победы одержала команда «Старт» и одну — команда «Комета»).

Очевидно, победы команды «Старт» были со счетом 2:0, 3:1, 5:3. Значит, соотношение забитых и пропущенных мячей у команды «Старт» 10:4. Вничью закончились два матча в играх трех команд «Комета», «Ракета» и «Вымпел».

Установим количество очков, набранных в этих играх этими тремя командами. Всего разыгрывалось 12 очков. Команда «Старт» набрала 6 из этих 12 очков. Еще 2 очка у команды «Комета» в матче с «Вымпелом». Значит, нужно выяснить, как распределились оставшиеся 4 очка в двух играх, которые окончились вничью. При этом команда «Вымпел» сыграла один матч с командой «Ракета» (один матч она проиграла «Старту» и один матч проиграла «Комете»). Значит, команда «Вымпел» набрала всего одно очко. По тем же причинам команда «Комета» в последнем ничейном матче набрала одно очко, а всего в турнире она набрала три очка. И очевидно, команда «Ракета» набрала в турнире два очка. Команда «Ракета» в двух матчах сыграла вничью (ничейные результаты были только в двух матчах). При этом она пропустила в свои ворота три мяча. Значит, в матче с командой «Старт» команда «Ракета» пропустила пять мячей и результат этого матча 5:3.

Команда «Старт» сыграла с командой «Комета» со счетом 2:0. Действительно, если бы команда «Старт» сыграла с командой «Комета» со счетом 3:1 (это два возможных результата игры, указанных в условии задачи), то число забитых «Кометой» во всех играх мячей было бы больше двух (один мяч был бы забит «Старту», один — «Вымпелу» и не менее одного в ничейном матче с командой «Ракета»), а это противоречит условию задачи.

Теперь ясно, что матч между командами «Старт» и «Вымпел» окончился со счетом 3:1.

Так как в матчах с командами «Старт» и «Вымпел» команда «Комета» забила всего один мяч, а общее число забитых ею мячей два, то ее матч с командой «Ракета» закончился со счетом

1:1, а матч между командами «Ракета» и «Вымпел» окончился со счетом 2:2.

Теперь легко устанавливаются соотношения забитых и пропущенных мячей в турнире для каждой команды:

1. Команда «Старт» 10—4.
2. Команда «Комета» 2—3.
3. Команда «Ракета» 6—8.
4. Команда «Вымпел» 3—6.

Запишем полученные результаты в таблицу:

Команда	Старт	Комета	Ракета	Вымпел	Победы	Ничьи	Поражения	Мячи	Очки
Старт		2:0	5:3	3:1	3	—	—	10:4	6
Комета	0:2		1:1	1:0	1	1	1	2:3	3
Ракета	3:5	1:1		2:2	—	2	1	6:8	2
Вымпел	1:3	0:1	2:2		—	1	2	3:6	1

3.10. Число команд, участвующих в футбольном турнире, должно быть нечетным, т. е. $2n-1$. В противном случае в каждом турнире участвуют все команды (свободных от игры команд нет), и, значит, либо все команды одновременно проводят четное число встреч, либо все команды одновременно проводят нечетное число встреч.

Пусть после k-го тура четное число встреч провели семь команд. Тогда после k-го тура нечетное число встреч провели $2n-8$ команд (т. е. четное число команд).

По условию задачи в $(k+1)$-м туре четное число встреч также провели семь команд. При каких обстоятельствах это могло быть? Рассмотрим возможные случаи.

1) Если бы в $(k+1)$-м туре у шести команд из семи, которые в k-м туре имели четное число встреч, было теперь нечетное число встреч, а одна из семи команд, которые в k-м туре имели четное число встреч, была свободной от игры в $(k+1)$-м туре, то $2n-8$ команд, которые после k-го тура имели нечетное число встреч, после $(k+1)$-го тура будут иметь четное число встреч. Таким образом, после $(k+1)$-го тура четное число встреч будут иметь $(2n-8)+1=2n-7$ команд. При этом по условию задачи $2n-7=7$, и, следовательно, $n=7$, а общее число команд, участвующих в турнире, 13.

2) Пусть в $(k+1)$-м туре играли все семь команд, которые после k-го тура имели четное число встреч. Тогда после $(k+1)$-го тура они будут иметь нечетное число встреч. Кроме того, нечетное число встреч после $(k+1)$-го тура будет иметь еще одна команда из числа $2n-8$ команд, которые после k-го тура имели нечетное число встреч (она в $(k+1)$-м туре была свободна

от игры). При этом $(2n-8)-1$ команд из числа тех, которые после k-го тура имели нечетное число встреч, после $(k+1)$-го тура будут иметь четное число встреч, и по условию задачи $2n-8-1=7$. Значит, здесь $n=8$, а число команд, участвующих в турнире, 15.

Оба случая возможны.

3.11. Команда 6 «В» класса, занявшая первое место, набрала 5 очков. Действительно, из двенадцати очков, которые разыгрывались в турнире, 4 очка набрали в сумме команды 6 «Г» и 6 «Б» классов. Следовательно, команды 6 «А» и 6 «В» классов в сумме набрали восемь очков. Команда 6 «В» класса не могла набрать меньше пяти очков, так как в противном случае (при четырех очках) она делила бы первое место с командой 6 «А» класса. Но команда 6 «В» класса не набрала 6 очков, так как для этого нужно было иметь три победы, а общий счет 3:1 в таблице указывает на то, что эта команда могла одержать не более двух побед.

Из сказанного следует, что команда 6 «В» класса одержала две победы и один матч свела вничью. Будем заполнять турнирную таблицу.

Количество очков распределяется между командами так: 6 «А» — 3, 6 «Б» — 1, 6 «В» — 5, 6 «Г» — 3.

Ясно, что команда 6 «Б» занимает четвертое место, а второе и третье места нужно распределить между командами 6 «А» и 6 «Г» в зависимости от соотношения забитых и пропущенных шайб.

Так как команды 6 «А» и 6 «Б» сыграли вничью (см. табл.), то в первом столбце второй строки нужно указать этот же счет.

Установим результаты игры 6 «В» со всеми командами. Так как в матче с командой 6 «Г» команда 6 «В» забила один гол, то в этом матче был ничейный счет 1:1 (2 гола нужны команде 6 «В» для двух побед в остальных матчах). Значит, счет 1:1 ставится на пересечении четвертой строки третьего столбца и третьей строки четвертого столбца. Теперь ясно, что команда 6 «В» победила команды 6 «А» и 6 «Б» со счетом 1:0 в каждом матче, и этот счет нужно указать в соответствующих клетках таблицы, а также указать счет 0:1 напротив строк 6 «А» и 6 «Б» и столбца 6 «В».

Теперь очевидно, что команда 6 «А» в матче с командой 6 «Г» пропустила одну шайбу, а команда 6 «Г» забила одну шайбу. Следовательно, команда 6 «Г» проиграла со счетом 1:5, а команда 6 «А» выиграла со счетом 5:1 и имеет общий счет 6:3.

Осталось установить счет в матче команд 6 «Б» и 6 «Г».

Так как в играх с командами 6 «А» и 6 «В» команда 6 «Б» пропустила в сумме две шайбы, то в игре с командой 6 «Г» она пропустила также две шайбы.

Команда 6 «Г» в играх с командами 6 «А» и 6 «В» пропустила 6 шайб. Значит, в матче с командой 6 «Б» она пропустила одну шайбу.

Из сказанного следует, что в игре между командами 6 «Б» и 6 «Г» счет был 1:2 и общий счет команды 6 «Б» был 2:4, а команды 6 «Г» был 4:7.

Из общего счета команд 6 «А» и 6 «Г» заключаем, что второе место заняла команда 6 «А».

Итоговая же таблица имеет вид:

Команда	$6^а$	$6^б$	$6^в$	$6^г$	очки	счет	место
$6^а$		1:1	0:1	5:1	3	6:3	II
$6^б$	1:1		0:1	1:2	1	2:4	IV
$6^в$	1:0	1:0		1:1	5	3:1	I
$6^г$	1:5	2:1	1:1		3	4:7	III

3.12. Восстановим сначала изображенную таблицу. Так как число забитых мячей должно равняться числу пропущенных мячей (которых 18), то соотношение забитых и пропущенных мячей у команды «Алмаз» 1:3.

Всего в матче разыгрывалось 20 очков. Установим, как они распределены между командами.

У команды «Динамо» не более 7 очков (есть одна ничья), а у команды «Спартак» не менее 6 очков (есть три выигрыша).

У команды «Алмаз» не менее 2 очков (есть один выигрыш). Если бы у «Алмаза» было 3 очка, то по распределению мест у команд «Зенит» и «Торпедо» также было бы не менее чем по 3 очка и суммарное количество очков в итоге всех игр превысило бы 20 очков. Следовательно, у «Алмаза» 2 очка.

У команды «Зенит» не может быть больше 2 очков, так как в противном случае у «Торпедо» было бы не менее 4 очков (у команды «Торпедо» хуже соотношение забитых и пропущенных мячей, чем у «Зенита», она в таблице впереди «Зенита»). При этом сумма очков в турнире опять превысила бы 20 очков. Следовательно, у команды «Зенит» 2 очка, у команды «Торпедо» 3 очка. Но тогда на долю команд «Динамо» и «Спартак» остается 13 очков и их естественное распределение таково: «Динамо» — 7 очков, «Спартак» — 6 очков.

При таком распределении очков, очевидно, «Спартак» имеет три выигрыша и один проигрыш. Ясно, что этот проигрыш команде «Динамо». Команда «Алмаз» имеет один выигрыш и только 2 очка. Значит, остальные матчи она проиграла.

Команда «Зенит» имеет 2 очка, а число забитых ею мячей превышает число пропущенных мячей. Значит, один матч она выиграла, а остальные проиграла.

По рассмотренным результатам команда «Торпедо» проиграла матч «Спартаку», а с командой «Динамо» имеет ничью. При этом один матч команда «Торпедо» выиграла (у нее 3 очка, а ничьих у других команд больше нет) и два проиграла.

Команда	Победы	Ничьи	Поражения	Очки	Мячи
«Динамо»	3	1	0	7	7:0
«Спартак»	3	0	1	6	4:4
«Торпедо»	1	1	2	3	1:7
«Зенит»	1	0	3	2	5:4
«Алмаз»	1	0	3	2	1:3

Итак, мы установили для всех команд число выигрышей, число ничьих, число проигрышей, число очков и соотношение забитых и пропущенных мячей (см. табл.).

Установим теперь результаты каждой из игр между командами.

Команда	"Динамо"	"Спартак"	"Торпедо"	"Зенит"	"Алмаз"
"Динамо"		4:0	0:0	2:0	1:0
"Спартак"	0:4		2:0	1:0	1:0
"Торпедо"	0:0	0:2		0:5	1:0
"Зенит"	0:2	0:1	5:0		0:1
"Алмаз"	0:1	0:1	0:1	1:0	

Как указывалось, команда «Динамо» имеет ничью с «Торпедо» и выиграла у команд «Спартак», «Зенит» и «Алмаз».

«Спартак» проиграл «Динамо» и выиграл у команд «Торпедо», «Зенит» и «Алмаз».

Отметим, что команды «Торпедо», «Зенит» и «Алмаз» имеют по одному выигрышу. Причем команды «Торпедо» и «Алмаз» могли закончить выигранные матчи только со счетом 1:0.

Выясним, у какой из двух команд («Торпедо» или «Зенит») выиграла команда «Алмаз». Предположим, что она выиграла у команды «Торпедо». Как указывалось, при этом «Торпедо» был забит один гол. В матче, который команда «Торпедо» выиграла, ей не забили ни одного гола. Матч «Динамо» — «Торпедо» закончился вничью, и счет при этом мог быть только 0:0

(команда «Динамо» во всех матчах не пропустила ни одного гола). Таким образом, в указанных трех матчах команда «Торпедо» пропустила только один мяч из семи пропущенных во всем турнире. Следовательно, в матче «Спартак» — «Торпедо» команде «Торпедо» должны были забить 6 мячей. Это противоречит тому, что «Спартак» во всех играх забил только 4 мяча. Следовательно, команда «Алмаз» не выиграла у команды «Торпедо», а проиграла ей со счетом 0:1. При этом ясно, что команда «Алмаз» выиграла у команды «Зенит» со счетом 1 : 0.

Учитывая соотношение забитых и пропущенных мячей у команды «Алмаз», можно утверждать, что все проигранные ею матчи (командам «Динамо», «Спартак» и «Торпедо») она проиграла со счетом 0 : 1.

Команда «Зенит» проиграла командам «Динамо», «Спартак» и «Алмаз». При этом было пропущено 4 мяча (в игре с «Торпедо» пропущенных мячей быть не могло). Один из них забила команда «Алмаз». Значит, в играх с командами «Динамо» и «Спартак» «Зенит» пропустил 3 мяча. Так как команда «Динамо» в играх с двумя командами «Спартак» и «Зенит» забила 6 мячей, а «Спартаку» она больше четырех мячей забить не могла, то «Зениту» команда «Динамо» забила 2 мяча, «Спартаку» она забила 4 мяча, «Спартак» команде «Зенит» забил один мяч. При этом «Зенит» командам «Динамо» и «Спартак» не забил ни одного ответного мяча. Значит, «Зенит» сыграл с «Торпедо» со счетом 5 : 0.

Наконец, теперь видно, что команда «Спартак» сыграла с командой «Торпедо» со счетом 2 : 0.

3.14. Обозначим через a_i число очков, выбитых первым стрелком при i-м выстреле, а через b_i число очков, выбитых вторым стрелком при i-м выстреле.

Тогда из условий задачи следует:

$$a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3, \tag{1}$$

$$a_3 + a_4 + a_5 = 3(b_3 + b_4 + b_5). \tag{2}$$

Из приведенных попаданий заключаем, что равенство (2) может выполняться, если b_1, b_2, b_3 — минимальные по числу очков попадания, а a_3, a_4, a_5 — максимальные и сумма $a_3 + a_4 + a_5$ кратна трем. Отсюда видно, что b_3, b_4, b_5 — это числа 2, 3 и 4, а a_3, a_4, a_5 — это числа 10, 9, 8.

Далее видим, что первыми четырьмя выстрелами (каждый стрелок сделал по два) они выбили очки: 9, 8, 5, 4. Используем условие (1). Очевидно, что при этом сумма $a_1 + a_2$ должна быть наименьшей при ее выборе из четырех чисел (9, 8, 5, 4), а $b_1 + b_2$ — наибольший при выборе ее из тех же чисел.

Это возможно при $a_1 = 5,\ a_2 = 4,\ a_3 = 10,$

$$b_1 = 9,\ b_2 = 8,\ b_3 = 2.$$

3.15. Так как стрелок выбил 90 очков и из них 4 раза попал в десятку, т. е. набрал 40 очков, то в другие 6 раз он набрал оставшиеся 50 очков.

Известно, что стрелок попал в семерку, восьмерку и девятку хотя бы один раз и в другие круги мишени не попадал. Поэтому за три выстрела он набрал $9+8+7=24$ очка и за три оставшихся выстрела выбил 26 очков. Такое количество очков можно набрать из комбинаций цифр 7, 8 и 9 единственным образом:

$$8+9+9=26.$$

Таким образом, в семерку стрелок попал 1 раз, в восьмерку — 2 раза, а в девятку — 3 раза.

3.16. Попадания стрелка в круги мишени дают соответственно 1, 2, 3, 5, 10, 20, 25, 50 очков.

Обозначим через x, y и z число очков, которые получал стрелок при попадании в круги мишени, а через a, b, c число попаданий в каждый круг соответственно. Тогда по условию задачи $ax+by+cz=96$.

Так как спортсмен произвел шесть выстрелов и попадал в некоторые отверстия более одного раза, то a, b, c могут принимать значение не менее 1, но не более 4. При этом возможны три варианта значений a, b, c: 1, 1, 4; 1, 2, 3; 2, 2, 2.

Следовательно, для решения задачи необходимо решить в положительных целых числах три уравнения:

$$x+y+4z=96,$$
$$x+2y+3z=96,$$
$$2x+2y+2z=96.$$

Легко показать, что первое уравнение не имеет решений в указанных в условии числах, второе уравнение имеет два решения: $x=1$, $y=10$, $z=25$; $x=50$, $y=20$, $z=2$, а третье уравнение имеет одно решение: $x=3$, $y=25$, $z=20$.

4.4. Так как результат умножения есть целое число, а не дробь, то цифра * у множимого после запятой должна быть равна 5.

Так как в результате умножения числа 38,5 на число *6 мы должны получить трехзначное число, то здесь цифра * должна быть равна 1. При этом $38{,}5\times16=616$. В противном случае если * есть цифра 2, то $38{,}5\times26=1001$, т. е. число четырехзначное.

4.5. Так как произведение множимого на 2 есть трехзначное число, то число сотен множимого не более 4.

Так как произведение множимого на 2 в десятках дает 3, а число десятков множимого 1, то число единиц множимого не меньше 5. Более того, произведение числа сотен множителя (т. е. 3) на число единиц множимого дает в числе единиц 5. Это возможно, если число единиц множимого равно 5.

Произведение числа десятков множителя на число единиц множимого, очевидно, равно 0. Это значит, что число десятков множителя четно.

Произведение множимого на число десятков множителя есть число четырехзначное, причем число его тысяч равно 3. Это возможно, если произведение числа десятков множителя на число сотен множимого не менее 29. Учитывая, что число сотен множимого не более 4, а число десятков множителя четно, приходим к выводу, что число сотен множимого равно 4, а число десятков множителя равно 8.

Значит, имеем произведение:

$$\begin{array}{r} \times\; 415 \\ 382 \\ \hline 830 \\ +\; 3320 \\ 1245 \\ \hline 158530 \end{array}$$

4.6. Так как произведение множимого *9* на число единиц множителя дает число 2*2, то число единиц в числе *1* может быть равно только единице. Но тогда число сотен и число единиц множимого должны быть равны 2 и ребус принимает вид:

$$\begin{array}{r} \times\; 292 \\ {*}11 \\ \hline 292 \\ +\; 292 \\ {*}{*}{*} \\ \hline {*}{*}612 \end{array}$$

Далее, так как произведение числа сотен множителя на множимое дает трехзначное число, то число сотен множителя не больше 3. Кроме того, из условия задачи ясно, что произведение числа сотен множителя на число единиц множимого должно дать число, в единицах которого цифра 4. Это возможно в двух случаях: число сотен множителя равно 2 или 7. Но второй случай, как было обосновано, исключается. Значит, множителем является число 211 и мы получаем:

$$\begin{array}{r} \times\; 292 \\ 211 \\ \hline 292 \\ +\; 292 \\ 584 \\ \hline 61612 \end{array}$$

4.7. Так как произведение числа 126 на число единиц множителя ** имеет в единицах число 6, то цифра, стоящая в единицах множителя, либо 1, либо 6.

Так как произведение числа 126 на число десятков множителя есть число четырехзначное, то это число десятков множителя больше 7 (либо число 8, либо число 9).

Таким образом, множителем является двузначное число ** в одном из четырех вариантов: 81, 91, 86, 96.

Выполняя действия умножения в этих четырех вариантах, получаем:

$$\begin{array}{r} \times\, 126 \\ 81 \\ \hline 126 \\ +\ 1008 \\ \hline 10206 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times\, 126 \\ 91 \\ \hline 126 \\ +\ 1134 \\ \hline 11466 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times\, 126 \\ 86 \\ \hline 756 \\ +\ 1008 \\ \hline 10836 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times\, 126 \\ 96 \\ \hline 756 \\ +\ 1134 \\ \hline 12096 \end{array}$$

Сравнивая эти результаты с условием задачи, видим, что справедлив первый вариант. В нем и записана расшифровка ребуса.

4.8. Так как действие деление является обратным для действия умножение, то ребус задачи 4.6 можно заменить ребусом

$$\begin{array}{r} \times\, *7 \\ ** \\ \hline *1 \\ +\ **5 \\ \hline 14** \end{array}$$

Произведение числа единиц множимого и множителя оканчивается единицей. Это возможно, если число единиц множителя равно трем.

Произведение числа десятков множителя на число единиц множимого оканчивается пятью. Это возможно, если число десятков множителя равно пяти.

С учетом сказанного ребус принимает вид:

$$\begin{array}{r} *7 \\ \times\, 53 \\ \hline *1 \\ +\ **5 \\ \hline 14*1 \end{array}$$

Выясним, чему равно число десятков множимого. Так как произведение двузначного числа *7 на 3 есть число двузначное, то число десятков множимого меньше трех, т. е. единица или два. Но если *7 есть 17, то произведение его на 5 есть число двузначное. Это противоречит условию задачи.

Следовательно, множимое есть число 27 и ребус расшифровывается так:

$$\begin{array}{r} \times\ 27 \\ 53 \\ \hline 81 \\ +\ 135 \\ \hline 1431 \end{array}$$

А исходный ребус расшифровывается так:

$$\begin{array}{r|l} -\,1431 & 27 \\ \cline{2-2} 135 & 53 \\ \cline{1-1} -\,81 & \\ 81 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

4.9. Для удобства ссылок обозначим цифры различными буквами, учитывая при этом, что различным буквам соответствуют различные цифры и различным цифрам соответствуют различные буквы.

При этом ребус принимает вид:

$$\begin{array}{r|l} -\,abc & dl \\ \cline{2-2} nm & k \\ \cline{1-1} p & \end{array}$$

Очевидно, что $k \neq 1$ и $l \neq 1$ (иначе m равнялось бы k или l).

Так как при вычитании из трехзначного числа abc двузначного числа nm мы получаем однозначное число, то $a=1$, $b=0$, $n=9$. При этом ясно, что $m>c$ (если $m=c$, то $p=0$, а если бы $m<c$, то разность $ab-n=0$, чего не может быть). Значит $c \leqslant 8$ и число abc может быть одним из чисел 102, 103, 104, 105, 106, 107, 108 ($c \neq 1$, так как $a=1$).

Так как $m>c$, то $m \geqslant 3$ и число nm может быть одним из чисел 93, 94, 95, 96, 97, 98.

Очевидно, $(10d+l)\cdot k=10n+m$ или $(10d+l)\cdot k=90+m$. Здесь возможны два случая:

1) $d\cdot k=9$, $l\cdot k=m$;

2) $d\cdot k=8$, $l\cdot k=10+m$.

Первый случай исключается, так как ни d, ни k не могут быть равны единице ($a=1$).

Поэтому имеет место второй случай, и при этом $d\cdot k=8=$ $=2\cdot 4$, а $l\cdot k=10+m$.

Так как $l\cdot k=10+m$ — число двузначное и составное, то $10+m$ может быть одним из чисел 14, 15, 16, 18 ($m \geqslant 3$), т. е. m может быть одним из чисел 4, 5, 6, 8. Но $m \neq 4$ (d или k есть числа 2 и 4). Следовательно, m может быть одним из чисел 5, 6 и 8, а $l\cdot k$ — одним из чисел 15, 16 и 18 или $3\cdot 5$, $2\cdot 8$, $2\cdot 9$ или

$3\cdot6$. Однако числа $d\cdot k$ и $l\cdot k$ имеют общий множитель k, равный 2 или 4. Его нет в числе $3\cdot5$. Значит, $l\cdot k$ — это одно из чисел 16 или 18. Но если $l\cdot k=18$, то $k=2$, а $l=9$, что невозможно, так как $n=9$. Следовательно, $l\cdot k=16=2\cdot8$, а общим множителем чисел $l\cdot k$ и $d\cdot k$ является $k=2$. При этом $d=4$, $l=8$, $m=6$.

Остается установить значения c и p. Так как по условию все десять цифр в зашифрованном примере различные и $c<m$, т. е. $c<6$, то возможен только один случай $c=3$, и тогда $p=$ $=7$ (случай $c=5$ отпадает, так как при этом $p=9$, а это противоречит тому, что $n=9$).

Следовательно, пример расшифровывается так:

$$\begin{array}{r|l} 103 & 48 \\ \cline{2-2} -\;96 & 2 \\ \cline{1-1} 7 & \end{array}$$

4.12. Так как уже $10^4=10\,000$ — число пятизначное, то число $Р+О+М+А$ меньше 10. Но $5^4=625$ — число трехзначное. Значит, число $Р+О+М+А$ больше 5, но меньше 10. Следовательно, этим числом могут быть 6, 7, 8 и 9. Но $6^4=1296$, $7^4=2401$, $8^4=4096$, $9^4=6561$.

Из этих четырехзначных чисел только число 2401 имеет сумму цифр, равную 7.

$(2+4+0+1)^4=7^4=2401$. Значит, число $РОМА=2401$.

4.13. Так как возводится в степень Н двузначное число АА и в результате получается четырехзначное число АННА, то $Н<4$ (иначе уже $10^4=10\,000$, т. е. число пятизначное). Но $Н\neq1$, так как $(АА)^1=АА$. Значит, или $Н=2$, или $Н=3$.

Если $Н=2$, то $(10А+А)^2=121\cdot А^2$. Отсюда видно, что $А\neq1$, $А\neq2$. При $А=3$, 4, 5, 6, 7, 8, 9 получаем соответственно четырехзначные числа 1089, 1936, 3025, 4356, 5929, 7744, 9801, но они не удовлетворяют условию. Следовательно, $Н\neq2$.

При $Н=3$ имеем $(10А+А)^3=(11)^3\cdot А^3=1331\cdot А^3$. И при $А=1$ имеем $(11)^3=1331$.

Таким образом, $А=1$, $Н=3$.

4.14. Числа Я и С — однозначные, и степень $Я^С$ дает пятизначное число, ясно, что $Я\neq0$, $Я\neq1$. Легко видеть, что $Я\neq2$, так как даже $2^9=512$.

Рассмотрим степени, основания которых 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, а показатель степени такой, что степень дает пятизначное число. Это будут числа:

$3^9=19\,683$,	$5^6=15\,625$,	$7^5=16\,807$,
$4^8=65\,536$,	$5^7=78\,125$,	$8^5=32\,768$,
$4^7=16\,384$,	$6^6=46\,656$,	$9^5=35\,049$.

Отсюда видно, что равенство $Я^С = СЕМЬЯ$ расшифровывается так: $5^7 = 78\,125$, т. е. Я = 5, С = 7, Е = 8, М = 1, Ь = 2.

4.15. Так как возведение двузначного числа $\triangle\square$ в степень $\triangle$ приводит к трехзначному числу, то $\triangle \neq 1$.

$\triangle < 3$, так при $\triangle = 3$ уже $10^3 = 1000$ — число четырехзначное. Значит, $\triangle = 2$.

По условию задачи, возводя $2\square$ в квадрат, мы должны получить трехзначное число, у которого число единиц и число сотен совпадают с числом единиц числа $2\square$. Это возможно лишь в случаях, если $\square$ является одной из цифр: 1, 5, 6. Но при $\square = 1$ имеем $(21)^2 = 441$, а при $\square = 5$ имеем $(25)^2 = 625$. В обоих случаях число сотен полученных трехзначных чисел не совпадает с числом их единиц. В то же время $(26)^2 = 676$.

Следовательно, $\square = 6$, а $\diamondsuit = 7$.

4.16. Из условия задачи следует система алгебраических уравнений относительно неизвестных к, а, з, с, о, т, н, я:

$$\left.\begin{aligned} 6\cdot к &= 10\alpha + я,\\ 6\cdot a + \alpha &= 10\beta + н,\\ 6\cdot з + \beta &= 10\gamma + т,\\ 6\cdot a + \gamma &= 10\delta + о,\\ 6к + \delta &= c. \end{aligned}\right| \qquad (1)$$

В системе (1) числа α, β, γ, δ также неизвестные. Очевидно, каждое из них может принимать одно из значений из множества $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

Из пятого уравнения системы (1) видно, что $6к < 10$. Но $k \neq 0$. Поэтому $k = 1$. При этом из первого уравнения системы следует, что $\alpha = 0$, а $я = 6$.

Все случаи решения уравнения $6a = 10\beta + н$ приведены ниже:

1) $\beta = 0$, $н = 6$, $a = 1$;
2) $\beta = 1$, $н = 2$, $a = 2$;
3) $\beta = 1$, $н = 8$, $a = 3$;
4) $\beta = 2$, $н = 4$, $a = 4$;
5) $\beta = 3$, $н = 0$, $a = 5$;
6) $\beta = 3$, $н = 6$, $a = 6$;
7) $\beta = 4$, $н = 2$, $a = 7$;
8) $\beta = 4$, $н = 8$, $a = 8$;
9) $\beta = 5$, $н = 4$, $a = 9$.

Из рассмотрения этих случаев вытекает, что возможен единственный, когда $\beta = 3$, $н = 0$, $a = 5$.

Действительно, все буквы в ребусе должны иметь разные значения. Поэтому в уравнении $6a = 10\beta + н$ $a \neq 1$ (так как $k = 1$). Но также $a \neq 2$; 4; 6; 8 (в этом случае соответственно $н = 2$; 4; 6; 8).

Если $a = 9$, то $10\beta + н = 54$, но из четвертого уравнения системы (1) следует $54 + \gamma = 10\delta + 0$, а из пятого уравнения $6 + \delta = c$, где $c > 10$, что невозможно, так как c — цифра.

Покажем, что случай 3 также приводит к противоречию. Действительно, при $\beta=1$, $н=8$, $a=3$ третье уравнение системы принимает вид $6з+1=10\gamma+т$. Ясно, что здесь т — нечетное число. Но $т\neq1$, так как $к=1$; $т\neq3$, так как $a=3$.

Рассмотрим остальные возможные значения т.

а) Пусть $т=5$. Тогда $\gamma=2$, $з=4$. При этом из четвертого уравнения системы имеем о равно нулю, $\delta=2$. Но как следует из пятого уравнения при $\delta=2$ $c=н=8$, т. е. получили противоречие.

б) Пусть $m=7$. Тогда $\gamma=9$, $з=6$. При этом из четвертого уравнения системы находим $о=1$, т. е. $о=к=1$, и вновь пришли к противоречию.

в) Пусть $m=9$. Тогда $\gamma=4$, а $з=н=8$, и здесь имеем противоречие.

Покажем, что случай 5 приводит к решению задачи. Пусть $\beta=3$, $н=0$, $a=5$. Тогда третье уравнение системы принимает вид $6з+3=10\gamma+т$. Здесь т может быть только нечетным числом. Но $т\neq1$, так как $к=1$; $т\neq5$, так как $a=5$. При $т=3$ $з=a=5$, т. е. получаем противоречие. При $т=9$ имеем $з=6$, $\gamma=3$. Тогда из четвертого уравнения системы $о=3$, $\delta=3$, а из пятого уравнения $c=т=9$, т. е. получаем противоречие. Наконец, при $т=7$, $з=4$, $\gamma=2$, а из четвертого уравнения $о=2$, $\delta=3$, и, значит, $c=9$, следовательно, ребус расшифровывается так:

$$\begin{array}{r} 15451\\ 15451\\ 15451\\ +\ 15451\\ 15451\\ \underline{15451}\\ 92706 \end{array}$$

Остается рассмотреть случай 7. Пусть $\beta=4$, $н=2$, $a=7$. Тогда третье уравнение системы принимает вид $6\cdot з+4=10\gamma+т$. Ясно, что здесь т — четное. Но $т\neq2$, так как $н=2$; $т\neq6$, так как $я=6$. При $т=0$, очевидно, $\gamma=1$, или $\gamma=4$. Но при $\gamma=1$ $з=к=1$, а при $\gamma=4$ $з=я=6$, т. е. в обоих случаях получаем противоречие.

При $т=4$ $\gamma=3$, а $з=5$. Но тогда из четвертого уравнения получаем $о=з=5$, т. е. противоречие. При $т=8$, $\gamma=2$, $з=4$ из четвертого уравнения получаем $о=з=4$, и здесь противоречие.

Этим исчерпано рассмотрение всех случаев. Как показано, задача имеет единственное решение.

4.17. Так как квадрат трехзначного числа ПАР является числом пятизначным, то справедливы неравенства $100\leqslant ПАР\leqslant 316$. Действительно, $(316)^2=99\,856$ — число пятизначное, а

$(317)^2=100\,489$ — шестизначное. Значит, число П может принимать только значения 1, 2, 3.

Так как квадраты однозначных чисел в числе единиц могут иметь только цифры 1, 4, 5, 6, 9, то А может быть только одним из этих чисел. Но $А \neq 5$, иначе $Р=5$.

Рассмотрим различные варианты значений А.

1) Пусть $А=1$. Так как $Р \neq 1$, то единственно возможное значение $Р=9$, а П равно или 2, или 3. Но число $391>316$, и, значит, квадрат его — число шестизначное, а квадрат числа 291: $(291)^2=84\,681$ не удовлетворяет условию задачи. Следовательно, $А \neq 1$.

2) Пусть $А=4$. При этом или $Р=2$, или $Р=8$. Очевидно, квадраты чисел 342 и 348 дадут шестизначные числа, квадраты чисел 142, 148 имеют в числе десятков тысяч цифру, меньшую 4, а квадрат числа 248 имеет в числе десятков тысяч цифру, большую 4.

3) Пусть $А=6$. Тогда или $Р=6$, или $Р=4$. Но $Р \neq 6$, так как $А=6$. При $Р=4$ возможными значениями числа ПАР являются 164, 264, 364.

Из этих трех чисел удовлетворяет условию задачи только число 264, так как $(264)^2=69\,696$.

4) Пусть $А=9$. Здесь или $Р=3$, или $Р=7$, и, следовательно, на роль числа ПАР могут претендовать числа 193, 293, 197, 297, 397. Квадрат последнего числа есть число шестизначное, а квадраты остальных чисел $(193)^2=37\,249$, $(197)^2=38\,809$, $(293)^2=$ $=85\,849$, $(297)^2=88\,209$. Таким образом, задача имеет единственное решение:

$$(264)^2=69\,696.$$

4.18. Кубы двузначных чисел равны четырехзначному числу только для двузначных чисел, меньших 22. Поэтому следует рассматривать двузначные числа от 10 до 21. Ясно, что нужно отбросить числа 10 и 20, так как их кубы содержат три нуля, т. е. одинаковые цифры. Рассмотрим кубы остальных допустимых двузначных чисел:

$(11)^3=1331$, $(12)^3=1728$, $(13)^3=2197$, $(14)^3=2744$, $(15)^3=3375$, $(16)^3=4096$, $(17)^3=4913$, $(18)^3=5832$, $(19)^3=6859$, $(21)^3=9261$.

Только для двух из этих чисел $(17)^3=4913$ и $(18)^3=5832$ сумма цифр равна основанию степени $4+9+1+3=17$, $5+8+3+$ $+2=18$.

Но равенства $(17)^3=4913$ и $4+9+1+3=17$ удовлетворяют условию задачи, а равенства $(18)^3=5832$ и $5+8+3+2=18$ не удовлетворяют условию задачи, так как в первом равенстве буква О означает 1, а во втором — 3.

Итак, $О=1$, $Н=7$, $А=4$, $К=9$, $П=3$.

4.19. Запишем условие задачи в виде

$$
\begin{array}{r}
\times\ r_1\, r_2\ \mathrm{H}_1 \\
\mathrm{H}_2\ \mathrm{H}_3 \\
\hline
+\ r_3\, \mathrm{H}_4\, r_4\ \mathrm{H}_5 \\
r_5\, \mathrm{H}_6 \mathrm{H}_7\ \ \ \ \\
\hline
\mathrm{H}_8\mathrm{H}_9\mathrm{H}_{10}\mathrm{H}_{11}\mathrm{H}_5
\end{array}
$$

Число H_6 равно сумме числа $(r_2 \cdot H_2)$ и числа десятков произведения $H_1 \cdot H_2$. Учитывая, что $r_2 \cdot H_2$ — число четное, то это возможно, если число десятков произведения $H_1 \times H_2$ нечетное, т. е. оно равно 1, 3, 5, 7 или 9. Но произведение числа десятков двух нечетных цифр H_1 и H_2 нечетно лишь в случаях:

а) $\left.\begin{array}{l} H_1=3, \\ H_2=5; \end{array}\right\}$ б) $\left.\begin{array}{l} H_1=5, \\ H_2=7; \end{array}\right\}$ в) $\left.\begin{array}{l} H_1=7, \\ H_2=5; \end{array}\right\}$ г) $\left.\begin{array}{l} H_1=5, \\ H_2=3 \end{array}\right\}$

(случай $H_2=1$ исключается, так как тогда произведение множимого на H_2 будет rrH, а по условию оно равно rHH).

Учитывая, что $r_5H_6H_7$ — трехзначное число, а $r_1 \geqslant 2$, видим, что $H_2 \neq 5$ и $H_2 \neq 7$. Следовательно, $H_2=3$. Но тогда $H_1=5$. Так как $H_1=5$, а H_3 — нечетное, то произведение $H_1 \times H_3$ должно оканчиваться цифрой 5. Значит, $H_5=5$.

Очевидно, произведение $H_1 \times H_3$ может принимать значения 5, 15, 25, 35, 45 (если H_3 принимает значения 1, 3, 5, 7, 9). Но $H_3 \neq 1$. Иначе произведение $(r_1r_2H_1) \times H_3$ будет трехзначным числом, а оно по условию четырехзначное.

Число r_4 является числом единиц числа, которое получается как сумма произведения $r_2 \times H_3$ и числа десятков произведения $H_1 \times H_3$. Но произведение $r_2 \times H_3$ четное. Поэтому справедлив лишь случай, когда число десятков произведения $H_1 \times H_3$ есть число четное. Это возможно, если $H_1 \times H_3=25$ или $H_1 \times H_3=45$, т. е. $H_3=5$ или $H_3=9$.

Так как $r_5H_6H_7$ — число трехзначное, равное произведению $(r_1r_2H_1) \times H_2$, и $H_3=3$, то $r_1=2$ (очевидно, не равно нулю и не может быть равно 4, или 6, или 8).

Таким образом, число $r_1r_2H_1$ может быть одним из пяти чисел 205, 225, 245, 265, 285.

Их произведения на 35 (при $H_3=5$) будут, очевидно, четырехзначными числами, а по условию $(r_1r_2H_1) \times (H_2H_3)$ — пятизначное число. Значит, $H_3 \neq 5$, и поэтому $H_3=9$.

Но произведения чисел 205, 225, 245 на число 39 будут также четырехзначными числами, а произведение $265 \times 39=10\,135$ не удовлетворяет условию $H_8H_9H_{10}H_{11}H_5$, так как здесь вторая цифра 0 не является нечетным числом.

Следовательно, $r_2=8$ и при этом $(r_1r_2H_1) \times (H_2H_3)=285 \times$ $\times 39=11\,115$.

4.21. Из равенства ГВД — МАД = АКД следует, что Д = 0.
Из равенства АЕЕ + БА = ГВД следует, что Г = А + 1.
Из равенства МКК + НВ = АКД следует, что А = М+1.
Из равенства МКК — АК = МАО можно записать МК — А = = МА. Но тогда К = 2А.

Из равенства АЕЕ — МКК = МКК следует Е = 2К, А = 2М.
Сравнивая А = М + 1 и А = 2М, получаем М = 1, при этом А = 2, Г = 3, К = 4, Е = 8, Д = 0.

Равенство АЕЕ + БА = ГВД принимает вид 288 + Б2 = = 3ВО, 290 + 10Б = 300 + 10В, 10Б = 10 + 10В, Б = В + 1.

Равенство МКК — АК = МАД принимает вид 144 — 24 = = 120.

Равенство МКК + НВ = АКД принимает вид 144 + НВ = = 240. Отсюда НВ = 96, т. е. Н = 9, В = 6. Поэтому Б = 7.

И ребус расшифровывается так:

$$\begin{array}{c} 288 + 72 = 360 \\ - \quad\quad + \quad\quad - \\ 144 - 24 = 120 \\ \hline 144 + 96 = 240 \end{array}$$

4.22. Здесь, очевидно, мы имеем дело с числовым ребусом. Действительно, так как $ABCDEF$ — число из шести цифр и является квадратом некоторого трехзначного натурального числа, то, обозначая через x, y, z число сотен, десятков и единиц этого трехзначного числа соответственно, приходим к равенству

$$(100x + 10y + z)^2 = ABCDEF.$$

Ясно, что F — число единиц квадрата числа z. По условию цифры A, B, C, D, E, F расположены слева направо в порядке возрастания. Но тогда A не может быть больше 4, а F не может быть меньше 6.

Квадраты однозначных чисел могут иметь в числе единиц цифры 1, 4, 5, 6, 9. Значит, F может быть равно или 6, или 9. Но при $F = 6$ число $ABCDEF$ может иметь только единственный вид 123 456 (его цифры расположены в порядке возрастания и не превосходят 6), а это число не является квадратом никакого трехзначного числа. Следовательно, $F = 9$, а z при этом равно или 3, или 7.

Так как A не может быть больше 4, то x^2 меньше 50 и, значит, x не может быть больше 7. Если бы x было равно 7, то шестизначное число $ABCDEF$ либо было бы больше 500 000 и тогда невозможна запись его цифр в возрастающем порядке, либо оно меньше 500 000, но больше 490 000 при $y = 0$, а $z = 3$ $(703)^2 = = 494\,209$, и, значит, второй цифрой будет 9, а это также не дает числа, цифры которого будут расположены в возрастающем порядке.

Следовательно, x не больше 6. x больше 2, так как при $x = 2$ квадрат числа

$$100x + 10y + z \qquad (*)$$

является числом пятизначным. Значит, x может быть равен или 3, или 4, или 5, или 6. Но при $x = 6$ квадрат числа (*) или больше 360 000, но меньше 400 000, и тогда не удовлетворяется условие задачи (расположение цифр в порядке возрастания), или больше 400 000, и тогда шестизначное число имеет вид 456 789, которое не является квадратом трехзначного числа.

Если $x = 5$, то $x^2 = 25$ и квадрат числа (*) принимает вид: $250\,000 + 10\,000y + 1000z + 100y^2 + 20yz + z^2$.

Ясно, что первые две цифры шестизначного числа полностью определяются суммой $250\,000 + 10\,000\ y$. Очевидно, что первые две цифры шестизначного числа будут удовлетворять условию задачи только при $y = 9$, но тогда третья цифра (число тысяч) не будет удовлетворять условиям задачи ни при $z = 3$, ни при $z = 7$.

Если $x = 4$, то $x^2 = 16$ и шестизначное число принимает вид:

$$160\,000 + 8\,000y + 100y^2 + 20yz + 800z + z^2.$$

Ясно, что первая цифра шестизначного числа не может при этом быть равна единице. Но если первая цифра числа будет равна 2, то вторая цифра его должна быть не менее 3. Это возможно, если $y = 8$ или $y = 9$. При этом шестизначное число имеет вид:

$$160\,000 + 64\,000 + 6400 + 160z + 800z + z^2 \text{ или}$$
$$160\,000 + 72\,000 + 8100 + 180z + 800z + z^2,$$

который не удовлетворяет условиям задачи ни при $z = 3$, ни при $z = 7$.

Следовательно, остается рассмотреть случай, когда $x = 3$. При этом шестизначное число принимает вид:

$$90\,000 + 6000y + 100y^2 + 600z + 20yz + z^2. \qquad (**)$$

Ясно, что первой цифрой шестизначного числа может быть только единица. При этом легко показать, что y должен быть больше 3. Выражение (**) является шестизначным числом, все цифры которого разные, расположенные слева направо в возрастающем порядке (и это число является полным квадратом) при $y = 6$ и $z = 7$, и равно 134 689. Действительно, $(367)^2 = 134\,689$.

При других значениях y и z полученное шестизначное число не удовлетворяет условиям задачи.

5.2. Предположим, что первый болельщик прав в своем первом утверждении, т. е. Аня заняла второе место. Но при этом будет ложным второе утверждение второго болельщика, и, значит, истинным будет первое утверждение второго болельщика. Это привело нас к противоречию: Аня заняла и первое и второе места. Следовательно, неверно первое утверждение первого болельщика и поэтому верно его второе утверждение. Таким образом, *Даша заняла третье место.* При этом ясно, что неверно второе утверждение третьего болельщика, и тогда верно его первое утверждение: *Галя заняла второе место.* Справедливость последнего утверждения приводит к тому, что ложно второе утверждение второго болельщика, а поэтому справедливо его первое утверждение: *Аня заняла первое место.* Теперь очевидно, что *Валя заняла четвертое место.*

5.4. Установим имена братьев, сказавших неправду.

Предположим, что Толя сказал правду. Тогда солгали Андрей и Витя, которых обвиняет во лжи Толя. Но, кроме того, солгал и Дима, который возражает Толе.

Таким образом, предположив, что Толя сказал правду, мы пришли к противоречию — лгунов оказалось трое, а по условию задачи их не более двух. Значит, Толя говорит неправду.

Предположим, что Дима сказал правду. Тогда солгали Толя и один из двух братьев (Андрей или Витя). Это утверждает Дима. Но, кроме того, Диме возражает Юра. Значит, и он говорит неправду. Вновь пришли к противоречию. Следовательно, Дима солгал. Таким образом, солгали Толя и Дима, а правду говорили Андрей, Витя и Юра. Но из высказываний Андрея и Вити следует, что окно разбил Толя.

5.5. В условии задачи предполагается, что уважаемый в городе старик мог говорить только правду, известный мошенник мог только лгать, а малоизвестный чиновник в одном случае говорил правду, а в другом — ложь.

Установим имя старика:

1) Предположим, что Браун — старик. В таком случае оба его заявления истинны, но тогда и оба заявления Смита истинны, а это противоречит условию задачи.

2) Предположим, что Смит — старик. Тогда оба заявления Смита истинны. Но при этом, как видно, и оба заявления Брауна истинны, и мы вновь пришли к противоречию.

3) Предположим, что Джон — старик, и, следовательно, оба заявления Джона истинны. При этом первое заявление Брауна ложно, а второе истинно, что соответствует поведению чиновника.

Одновременно оба заявления Смита ложны, что соответствует поведению мошенника.

Таким образом, уважаемым стариком является Джон, известным мошенником — Смит, а чиновником — Браун. Преступление совершил Смит.

5.6. Возможны три предположения о том, кто украл портфель. Рассмотрим их по порядку, с тем чтобы выяснить, какое из предположений противоречит условиям задачи.

1) Пусть портфель украл Арчи. При этом первое и третье заявления Арчи неверны, а по условиям задачи неверно только одно из его заявлений. Значит, это предположение противоречит условию задачи, и поэтому Арчи не мог украсть портфель.

2) Пусть портфель украл Босс. Тогда первое его заявление неверно, следовательно, остальные два заявления должны быть верны. Правда, во втором его заявлении как бы подразумевается, что он, Босс, не брал портфель, но прямо он этого не говорит, и поэтому противоречие не возникает. Далее, третье заявление Арчи тоже неверно, значит, должны быть верными первые два.

Раз верно второе заявление Арчи, то верно и третье заявление Весли. Но, кроме этого, верно и первое заявление Весли, а поэтому второе заявление Весли неверно.

Таким образом, никаких противоречий с условиями задачи не возникает. Значит, Босс мог украсть портфель.

3) Пусть портфель украл Весли. Тогда первое его заявление неверно, а поэтому верны второе и третье. Раз верно третье заявление Весли, то верно и второе заявление Арчи. Первое и третье заявления Арчи также верны. Значит, верны все три заявления Арчи, что противоречит условию задачи. Поэтому Весли не мог украсть портфель.

Следовательно, портфель украл Босс.

5.7. Легко показать, что истинны второе и третье высказывания каждого из рыбаков и ложны остальные высказывания.

Предположим, что эти утверждения справедливы. Обозначим через $y_{\text{П}}$, $y_{\text{В}}$, $y_{\text{К}}$ количество рыб, пойманных Петей, Васей и Колей соответственно. Тогда из истинных высказываний Пети, Васи и Коли следует:

$$\left.\begin{aligned} y_{\text{В}} &= y_{\text{К}} + 1, \\ y_{\text{П}} + y_{\text{В}} &= y_{\text{К}} + 8, \\ y_{\text{П}} + 3 &= y_{\text{В}}. \end{aligned}\right\}$$

Решая эту систему, находим $y_{\text{П}} = 7$, $y_{\text{В}} = 10$, $y_{\text{К}} = 9$.

Этот результат подтверждает, что второе, третье высказывания каждого рыбака истинны, а первое и четвертое — ложны.

Можно показать, что все другие логические значения высказываний рыбаков приводят к противоречию. Пусть, например, первое и второе высказывания Пети истинны, а третье и четвертое его высказывания ложны. Тогда из истинности первого высказывания Пети следует, что первое высказывание Васи ложно, а из истинности второго высказывания Пети следует, что первое и второе высказывания Коли ложны. Но тогда по условию задачи истинны третье и четвертое высказывания Коли. Из истинности третьего высказывания Коли следует, что четвертое высказывание Васи ложно.

Так как из истинности первого и второго высказываний Пети следует, что $y_В=3$, а из истинности четвертого высказывания Коли следует, что

$$y_П+y_В=13,$$

то ясно что $y_П=10$, и, значит, второе высказывание Васи ложно. Таким образом, ложны первое, второе и четвертое высказывания Васи, а это противоречит условию задачи.

5.8. Для решения задачи достаточно предположить, что статуя, крайняя слева, не есть статуя бога правды. Тогда статуя бога правды либо находится в центре, либо крайняя справа. Но это противоречит ответам статуй, стоящих в центре и справа. Очевидно, если статуя, стоящая справа, есть бог правды, то она должна была бы или сказать, что рядом с ней находится бог лжи, или сказать, что рядом с ней находится бог дипломатии. Если же статуя, стоящая в центре, есть бог правды, то статуя должна была ответить, что она бог правды.

Следовательно, статуя бога правды может стоять только крайней слева. Но тогда из ее ответа следует, что в центре стоит статуя бога лжи и, следовательно, крайней справа — статуя бога дипломатии.

5.9. Из заявления В следует, что выиграла команда Правдина. Докажем это. Если В из Правдина, то сказанное им — правда и выиграла команда Правдина. Если В из Лгунова, то сказанное им — неправда и выиграла опять-таки команда Правдина.

Из заявления Б следует, что Б из Лгунова так как его заявление заведомо неверно. Докажем это. Нами уже доказано, что выиграла команда Правдина. Если Г из Правдина, то он не мог сказать, что их команда проиграла, так как это была бы ложь. Если Г из Лгунова, то он тоже не мог этого сказать, так как это была бы правда.

Из заявления Г следует, что А из Правдина. Докажем это. Если Г из Правдина, то А действительно с ним из одного города, т. е. из Правдина. Если Г из Лгунова, то А с ним не из одного города, т. е. А снова из Правдина.

Теперь легко ответить на все вопросы. Из последнего заявления А следует, что дело происходит в Правдине, В и Г из Лгунова.

Ответ: А из Правдина, Б, В, Г из Лгунова, матч происходит в Правдине, выиграла команда Правдина.

5.10. Запишем высказывания Косоглаза и Бороды в виде таблицы, в которой учтен номер высказывания каждого из них:

№ высказывания	Высказывание Косоглаза	Высказывание Бороды
1	Борода — чередовец	Косоглаз — чередовец
2	Курнос — правдовец	Курнос — лгуновец
3	Алощек — чередовец	Алощек — правдовец
4	Длинноух — лгуновец	Длинноух — чередовец

Рассмотрим все возможные варианты принадлежности Бороды и Косоглаза к жителям деревень Правдино, Чередово и Лгуново.

1) Они не могут быть оба жителями Правдина, так как это противоречит их первым высказываниям.

2) Невозможна принадлежность одного из них к жителям деревни Правдино, а другого к жителям деревни Лгуново, так как иначе в одном из первых высказываний один из них назывался бы жителем деревни Лгуново.

3) Невозможна принадлежность одного из них к жителям деревни Правдино, а другого к жителям деревни Чередово, так как иначе хотя бы одно из трех их высказываний (2-го, 3-го и 4-го) совпадало.

4) Они не могут быть оба жителями деревни Чередово, иначе из совпадения их первых высказываний (они в этом случае истинны) должно следовать совпадение третьих высказываний (а этого нет).

5) Невозможна принадлежность одного из них к жителям деревни Чередово, а другого к жителям деревни Лгуново, так как иначе хотя бы одно из трех высказываний (2-го, 3-го и 4-го) совпадало, т. е. оба были бы ложны.

Значит, в единственно возможном варианте они оба являются жителями деревни Лгуново. При этом из их вторых высказываний следует, что Курнос — чередовец, из третьих высказываний следует, что Алощек — лгуновец, а из четвертых высказываний следует, что Длинноух — правдовец.

5.11. Путешественник задал проходящему островитянину следующий вопрос: «Если бы я вас спросил, ведет ли эта дорога в деревню, вы бы сказали «да»?» В этом случае туземец должен сказать правду, если он даже лжец.

5.12. Из сообщения проводника следует, что проводник-абориген. Действительно, ответ встреченного островитянина мог быть только один: «Я — абориген», так как этот ответ является правдой для аборигена и ложью для пришельца. Следовательно, проводник сказал правду, и поэтому он принадлежит к аборигенам.

6.3. Легко видеть, что при n, кратном числу $k+1$, выигрышную стратегию имеет противник. В самом деле, если начинающий при любом его ходе берет r предметов ($r \leqslant k$), то противник должен брать $k+1-r$ предметов и эта стратегия обеспечивает взятие последнего предмета.

Если n не кратно числу $k+1$, то $n = q \cdot (k+1) + p$. В этом случае, очевидно, выигрышная стратегия начинающего такова: своим первым ходом он должен взять p предметов, а потом после каждого хода противника, взявшего r предметов ($r \leqslant k$), начинающий берет $k+1-r$ предметов.

Если начинающий не знает выигрышной стратегии и допускает в игре ошибки, то противник должен принять следующую стратегию.

1) Если начинающий своим первым ходом взял не p, а l предметов, где $l < p$, то противнику следует взять $p-l$ предметов и он становится в позицию начинающего.

Если начинающий своим первым ходом взял l предметов, где $l > p$, то противнику следует взять $k+1+p-l$ предметов и он вновь становится в позицию начинающего.

2) Если начинающий допустил ошибку при своем втором (или последующем) ходе и взял не $k+1-r$, а меньше (или больше) предметов, например m и $m < k+1-r$ ($m > k+1-r$), то противнику следует взять $k+1-r-m$ ($2k+2-r-m$) предметов и он становится в позицию начинающего.

Если проигрывает тот, кто берет последний предмет, то выигрышная стратегия начинающего такова: своим первым ходом он должен взять $p-1$ предметов, а после каждого хода противника, взявшего r предметов, брать $k+1-r$ предметов.

6.4. Так как число 15 представимо в виде суммы $15 = 3 + 4 + 4 + 4$, то выигрышная стратегия начинающего состоит в следующем: своим первым ходом начинающий должен взять три предмета, а потом после каждого хода противника, взявшего один или три предмета, брать соответственно три или один предмет.

6.5. Так как число 22 представлено в виде суммы $22 = 4 + 6 + 6 + 6$, то выигрышная стратегия начинающего состоит в следующем: своим первым ходом начинающий должен взять четыре предмета, а потом после каждого хода противника, взявшего два или четыре предмета, брать соответственно четыре или два предмета.

6.8. Рассмотрим доску форматом 3×3.

Будем обозначать клетки доски буквой A с индексами i, j, т. е. A_{ij}, где i — номер строки на доске, а j — номер столбца на доске.

Покажем, что, играя в крестики-нолики по новым правилам, начинающий всегда выигрывает. Действительно, если он поставит своим первым ходом на клетке A_{22} крестик, то противник вынужден будет своим первым ходом поставить нолик на одну из клеток, окружающих клетку A_{22}. Возможны два случая.

1) Противник своим первым ходом ставит нолик в угловую клетку, например A_{11}. Тогда начинающий, поставив нолик на противоположную (по диагонали) клетку, выигрывает, так как после этого хода начинающего любой ход противника ведет его к проигрышу.

0		
	+	
		0

2) Противник своим первым ходом ставит нолик не на угловую клетку, например A_{21}, тогда начинающий занимает ноликом клетку A_{23}. После этого противник вынужден занять ноликом одну из двух оставшихся клеток, например A_{12}. После чего начинающий, заняв ноликом клетку A_{32}, обеспечивает себе выигрыш.

	0	
0	+	0
	0	

6.9. Как начинающему обеспечить себе победу? Для этого он должен одну из трех пуговиц передвинуть вправо на последнюю клетку. Далее, после любого перемещения вправо одной из двух оставшихся пуговиц противником начинающий должен пуговицу перенести в ту же клетку, в которую перенес свою пуговицу противник.

Очевидно, эта стратегия обеспечивает победу начинающему.

Предположим теперь, что начинающий не знает выигрышной стратегии и своим первым ходом передвинул одну пуговицу вправо не на последнюю клетку, а на одну из предыдущих клеток. В этом случае достаточно указанную пуговицу передвинуть дальше на последнюю клетку и он становится в позицию начинающего в выигрышной стратегии.

Пусть теперь начинающий своим первым ходом переместил одну из трех пуговиц на последнюю клетку, но в одном из последующих ходов допустил ошибку, т. е. передвинул одну из двух оставшихся пуговиц не на ту клетку, на которую перенес свою пуговицу противник. Тогда противнику нужно переместить свою пуговицу (или пуговицу начинающего) на ту же клетку, на которой стоит вторая пуговица. При этом он, очевидно, становится в выигрышную позицию начинающего.

6.10. Второй мальчик выиграет, если он будет ставить ладьи симметрично ладьям первого относительно центра доски.

6.11. Нет. Действительно, если игра не закончилась после того, как все пятеро игроков сделали по одному ходу, то в этот момент у каждого из игроков имеется по две шашки одинакового цвета: у двоих по две черные, а у троих по две белые — и передается черная шашка. Если она попадает к игроку, имеющему две черные шашки, то игра заканчивается. Ясно, что не более чем на девятом ходу игра заканчивается.

6.12. В случае а) начинающий должен предоставить первый ход противнику, а затем брать из одной кучки столько камней, сколько из другой возьмет противник. В случае б) начинающий должен взять 14 камней из кучки, в которой было 30 камней (уравнять кучки), а затем вести игру, как в случае а).

6.13. Выигрышную стратегию имеет начинающий. Для победы он должен первым назвать число 1, а далее, если противник называет число x, то первый называет число $5-x$ и своим шестым ходом он достигает числа 26.

6.14. Начинающий первым называет число 1, а в дальнейшем, после того как противник назовет число $k_i \leqslant 10$, называет число $11-k_i$ $(i=1, 2, 3, \ldots, 9)$. Тогда в итоге будет получена сумма $1+k_1+(11-k_1)+k_2+(11-k_2)+\ldots+k_9+(11-k_9)=1+$ $+(k_1+k_2+\ldots+k_9)+11\cdot 9-(k_1+k_2+\ldots+k_9)=1+11\cdot 9=100$. Причем числа 100 достигнет начинающий, так как он последним назовет число $11-k_9$, добавление которого к предыдущей сумме и даст число 100.

6.15. Опишем выигрышную стратегию первого игрока.

Из чисел ряда 1, 2, 3, ..., 19 будем образовывать пары, суммы компонент которых равны 20. Это будут пары: (1, 19), (2, 18), (3, 17), (4, 16), (5, 15), (6, 14), (7, 13), (8, 12), (9, 11). В создании этих пар, естественно, не участвует число 10.

В связи с этим выигрышная стратегия первого игрока состоит в следующем: своим первым ходом он вычеркивает число 10, а после каждого хода противника, при котором вычеркивается число, являющееся компонентой некоторой пары, первый игрок должен вычеркнуть число, которое является второй компонентой той же пары.

После соответствующего числа вычеркиваний останется пара чисел, сумма которых равна 20 и, значит, делится на 5.

6.16. Чтобы обеспечить первому игроку разность между оставшимися двумя числами равной 55 (независимо от того, как бы ни играл противник), он может воспользоваться следующей стратегией: своим первым ходом начинающий вычеркивает 9 чисел от 47 до 55. При этом остальные числа разбиваются на две группы от 1 до 46 и от 56 до 101.

Все числа этих двух групп можно разбить на пары по следующему принципу: если k — первое число пары и $k < 47$, то второй компонентой пары берется число $55+k$, а если k — первое число пары и $k > 55$, то второй компонентой пары берется число $|55-k|$. Например, пары: $40, 55+40=95$; $70, |55-70|=15$.

В связи с этим для любого числа k $(k<47)$, вычеркнутого вторым игроком, первый вычеркивает число $55+k$, а для любого числа k $(k>55)$, вычеркнутого вторым игроком, первый вычеркивает число $|55-k|$. Но тогда после одиннадцати поочередных вычеркиваний чисел, указанных в условии задачи, остается одна пара из описанных выше и разность компонент этой пары — 55.

6.17. Все нечетные числа имеют вид $4k+1$ или $4k+3$. Рассмотрим оба случая.

Пусть в кучке $4k+3$ предметов. В этом случае стратегия, при которой начинающий выигрывает, состоит в следующем: своим первым ходом он должен взять два предмета, а далее после каждого хода противника начинающий берет столько предметов, сколько взял противник. При такой стратегии после ряда ходов игроки окажутся перед кучкой в три или пять предметов, и при этом предстоит ход противника. Если в кучке осталось три предмета, а начинающий уже взял, очевидно, $2+(4k-2)$; $2=2+2k-1=2k+1$ предметов, то независимо от того, сколько возьмет своим ходом противник (один или два предмета), начинающий берет последним ходом один предмет и, следовательно, выигрывает.

Пусть в кучке осталось пять предметов и предстоит ход противника, при этом начинающий уже взял, очевидно, $2+(4k-4):2=2k$ предметов. Если противник очередным ходом возьмет один предмет, то начинающий берет также один предмет и оказывается в условиях предыдущего случая.

Если противник возьмет очередным ходом два предмета, то начинающий берет также два предмета, оставляя на последний ход противника один предмет и, следовательно, выигрывает.

В случае, когда кучка перед началом игры содержит $4k+1$ предметов, начинающий при правильной стратегии противника проигрывает. Действительно, для этого противнику нужно пользоваться стратегией начинающего, рассмотренной в прошлом случае.

Теперь нетрудно установить стратегию играющих для случая, когда по условию задачи выигрывает тот, у кого в конце игры, после того как все предметы будут разобраны, окажется нечетное число предметов.

7.1. 1) Выигрывает участник игры в красном колпаке. Действительно, он видит на партнере по игре белый колпак и, зная, что предъявлялся только один белый колпак, приходит к выводу о том, что на нем может быть только красный колпак.

2) Выиграть может любой из участников игры, рассуждая так: «Если бы на мне был белый колпак, то мой партнер по игре сразу же пришел бы к выводу о том, что на нем красный колпак (см. первый случай задачи). Но он молчит. Значит, на мне не белый колпак, а красный».

7.2. 1) Выигрывает участник игры в красном колпаке. Действительно, он видит перед собой два белых колпака и, зная, что предъявлялось только два белых колпака, приходит к выводу о том, что на нем может быть только красный колпак.

2) Выиграть может один из двух участников игры, на которых надеты красные колпаки. Действительно, каждый из них видит один белый колпак и один красный и может рассуждать так: «Если бы на мне был белый колпак, то участник игры в красном колпаке видел бы два белых колпака и пришел бы к выводу о том, что на нем красный колпак (см. первый случай задачи). Но он молчит, значит, на мне не белый, а красный колпак».

3) Выиграть может любой из трех участников игры. Действительно, каждый из них видит два красных колпака и может рассуждать так: «Если бы на мне был белый колпак, то каждый из моих партнеров по игре видел бы один белый и один красный колпак и пришел бы к выводу о том, что на нем красный колпак (см. второй случай задачи). Но они молчат. Значит, на мне не белый, а красный колпак».

7.3. 1) Выигрывает один из участников игры в красном колпаке. Он видит перед собой три красных колпака и три белых и может рассуждать так: «Если бы на мне был белый колпак, то партнер по игре в красном колпаке видел бы перед собой четыре белых колпака (белых колпаков предъявлялось четыре) и пришел к выводу, что на нем красный колпак. Но он молчит. Значит, на мне не белый колпак, а красный».

2) Победителя в игре быть не может. Действительно, занумеруем участников игры. Для каждого из них очевидно, что любой из его партнеров видит по крайней мере пять красных колпаков. Поэтому если первый участник игры посчитает, что на нем белый колпак, и второй участник видит один белый и пять красных колпаков, то он не может предположить, что третий участник видит четыре красных и два белых колпака (подразумевая, что второй участник игры тоже предположил, что на нем белый кол-

пак). Следовательно, цепочка логических рассуждений обрывается, не дав результата.

7.5. Победителем игры будет один из двух участников игры в белом колпаке. Действительно, участники игры в белых и синих колпаках могут исключить из рассмотрения участников игры в красных колпаках, рассуждая аналогично тому, как это делалось в задаче 7.4. Тогда игра сводится к случаю, когда в ней пять участников, которым предъявлялось шесть белых и четыре синих колпака, а затем на них было надето два белых и три синих колпака. Любой из двух участников игры в белых колпаках может определить цвет своего колпака, рассуждая так: «Если бы на мне был синий колпак, то участник в белом колпаке видел бы перед собой четыре синих колпака (их всего четыре) и пришел бы к выводу, что на нем белый колпак. Но он молчит. Значит, на мне не синий, а белый колпак».

Аналогично можно было исключить из рассмотрения участников игры в синих колпаках. Тогда приходим к игре «мудрецов», в которой пять участников, которым предъявлялось шесть белых и пять красных колпаков. Ясно, что победителем и в этом варианте будет один из участников в белом колпаке.

Отметим, что исключить из игры ее участников в белых колпаках здесь невозможно.

8.2. Перевоз животных и капусты с левого берега реки на правый можно обеспечить с сохранением капусты и всех животных следующим образом.

В *первом рейсе* перевозчик берет с собой козла и собаку, оставляя на левом берегу двух волков и капусту. Переехав на правый берег, перевозчик оставляет там козла и с собакой возвращается на левый берег.

Во *втором рейсе* перевозчик берет с собой собаку и капусту, оставляя на левом берегу только волков. Переехав на правый берег, перевозчик оставляет там собаку и капусту, а с козлом возвращается на левый берег.

В *третьем рейсе* перевозчик берет с собой двух волков, оставляя на левом берегу козла. Переехав на правый берег, он оставляет там двух волков и капусту, берет с собой собаку и возвращается на левый берег.

В *четвертом рейсе* перевозчик забирает с собой собаку и козла и переезжает на правый берег.

На этом перевоз закончен.

8.3. Будем обозначать имя и фамилию каждого мальчика двумя буквами в виде x_y, где буква x — первая буква имени, а буква y — первая буква фамилии.

Из условия задачи следует, что нет мальчиков, соответствующих символам $А_А$, $Д_Д$, $К_К$, $Ф_Ф$, $Д_А$.

Но есть мальчик x_y, такой, что ему соответствуют мальчики $y_Ф$ и $К_x$. Рассмотрим возможные значения букв x и y для трех мальчиков: $y_Ф$, x_y, $К_x$.

Ясно, что X не К и не Ф (иначе было бы два мальчика с именем Карл или два мальчика с фамилией Фридрих).

Аналогично y не К и не Ф.

Следовательно, нужно рассмотреть два варианта:

1) $x=$ А, $y=$ Д; 2) $x=$ Д, $y=$ А.

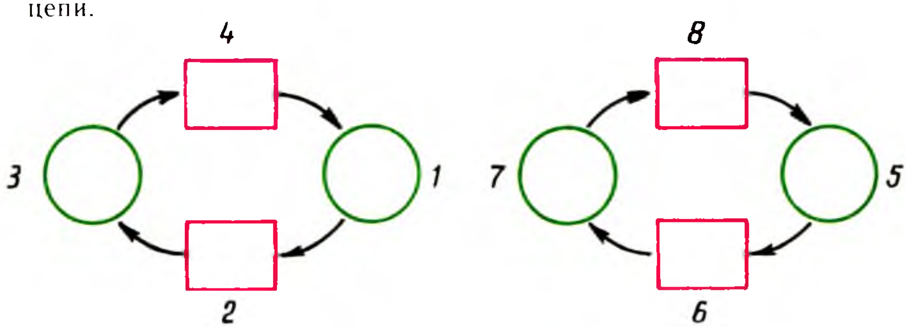
Но второй вариант исключается, так как в этом случае мы будем иметь мальчика по имени Дитрих и по фамилии Альберт, что противоречит условиям задачи.

Таким образом, имеем: Альберт Дитрих, Карл Альберт, Дитрих Фридрих и, наконец, Фридрих Карл.

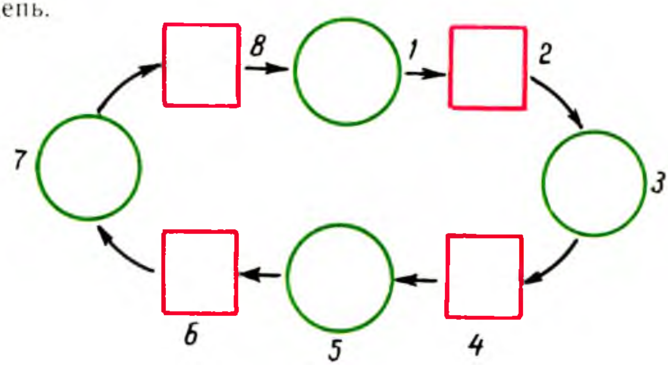
8.4. Будем обозначать места юношей в цепочке влюбленных кружками, а места девушек квадратами и для записи имен используем только их первые буквы.

В силу условий задачи возможны две схемы расположения кружков и квадратов.

I. Вся группа влюбленных распадается на две замкнутые цепи.



II. Вся группа влюбленных представляет собой одну замкнутую цепь.



Покажем, что I схема невозможна. Не нарушая общности рассуждений, предположим, что первое место занимает А. Тогда по первому условию задачи четвертое место занимает Т.

Рассмотрим возможные случаи размещения остальных участников группы.

1) Пусть второе место принадлежит М. Тогда по второму условию задачи третье место занимает Б. При этом во второй цепочке находятся Г, З, К и Д. Легко проверить, что это противоречит шестому условию задачи.

2) Пусть в первой цепочке третье место занимает К. Это противоречит третьему условию задачи (К любит девушку, которая влюблена в Д).

3) Пусть в первой цепочке третье место занимает Д. Это противоречит третьему условию задачи, так как Д любит девушка, в которую влюблен К.

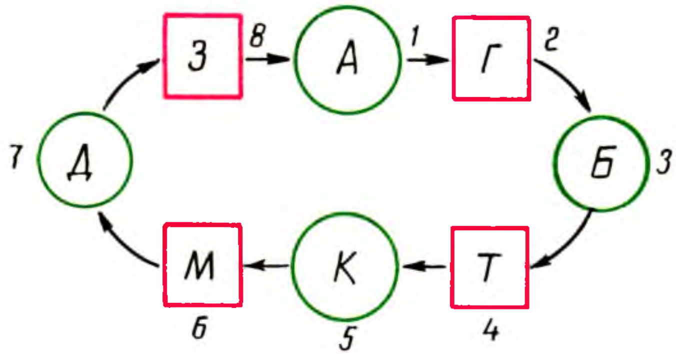
Таким образом, распад всей группы влюбленных на две замкнутые цепи всегда приводит к противоречию, т. е. невозможен.

Покажем, что II схема приводит к решению задачи. По-прежнему будем считать, что первое место в цепи занимает А. Тогда по первому условию задачи на четвертом месте находится Т. Выясним, на каком месте находится М.

а) Пусть М находится на 2 месте. Тогда из второго условия задачи следует, что Б занимает 7 место. Так как по пятому условию задачи З не любит Б, то на 6 месте может быть только Г, а на 8 — З. Но это противоречит шестому условию задачи.

б) Пусть М находится на восьмом месте. Тогда из второго условия задачи следует, что на пятом месте находится Б. При этом К не может занимать ни седьмое место, ни третье место, так как это противоречило бы третьему условию задачи. Следовательно, М не может быть на восьмом месте.

в) Пусть М находится на шестом месте. Тогда по второму условию задачи на третьем месте находится Б. Из пятого условия задачи следует, что на втором месте находится Г, а на восьмом — З. По третьему условию задачи К не может находиться на седьмом месте. Значит, К находится на пятом месте, а Д — на седьмом. См. ответ, который изображается замкнутой цепью.



8.5. По условию задачи у Коли три монеты по 15 к.

Одной из двух монет, сумма которых в десять раз меньше, чем остальные монеты, не может быть монета в 15 к., так как уже $15 \cdot 10 = 150$, а вся сумма денег у мальчиков (без 15 к.) равна 145.

У Коли нет монеты в 50 к. так как сумма $50 + 3 \cdot 15$ не делится на 10. Значит, монета в 50 к. положена Петей.

8.6. Учитывая, что у школьника были монеты только достоинством 15 к. и 20 к. и за билет в кино он отдал две монеты, имеем три возможных варианта траты денег при покупке билета:

1. $15 + 15 = 30$ (к.).
2. $15 + 20 = 35$ (к.).
3. $20 + 20 = 40$ (к.).

Так как стоимость билета в кино составляла $\frac{1}{5}$ часть денег школьника, то имеем три возможных варианта суммы всех денег школьника.

1. 150 к. 2. 175 к. 3. 200 к.

После оплаты билета в кино у него осталась одна из трех возможных сумм денег:

1. 120 к. 2. 140 к. 3. 160 к.

Половину этих денег составляют суммы:

1. 60 к. 2. 70 к. 3. 80 к.

Так как половину оставшихся денег школьник отдал за обед, оплатив его тремя монетами, то это возможно лишь в одном из трех случаев, когда половина оставшихся денег есть сумма в 60 к. и она составлена из трех двадцатикопеечных монет.

Следовательно, у школьника всего было восемь монет. Из них две достоинством по 15 к. и шесть достоинством по 20 к. (это следует из того, что двадцатикопеечных монет было больше).

8.7. По условию задачи у Пети могли быть монеты достоинством 1 к., 2 к., 3 к., 5 к. и 10 к. Сумма денег, взятых Васей у Пети, равна 15 к. Так как в этой сумме по одной монете каждого достоинства, то возможны случаи:

1) Васей взяты монеты достоинством в 5 к. и в 10 к.

2) Васей взяты монеты достоинством в 2 к., 3 к. и 10 к.

Рассмотрим первый случай.

1. Обозначим через x число монет Пети достоинством в 5 к., а через y число монет Пети достоинством в 10 к. Тогда по условию задачи $y = x + 4$ и справедливо равенство

$$5x + (x + 4) \cdot 10 = 100.$$

Отсюда $x = 4$, а $y = 8$, т. е. в этом случае у Пети было 4 монеты достоинством в 5 к. и 8 монет достоинством в 10 к.

2. Обозначим через x число монет у Пети достоинством в 2 к., а через y число монет у Пети достоинством в 3 к. Тогда из усло-

вия задачи следует равенство $2x+3y+(x+y+4)\cdot 10=100$. Отсюда $12x+13y=60$. Это — Деофантово уравнение. Его единственное решение в целых числах: $x=5$, $y=0$. Следовательно, у Пети было 5 монет достоинством в 2 к. и 9 монет достоинством в 10 к. Но, взяв из этой совокупности по одной монете каждого достоинства, мы не получим 15 к. Значит, второй случай невозможен.

8.8. Пусть в стаде было $a=k\cdot 10+\alpha$ баранов. Здесь k — число десятков баранов, а α — число единиц баранов в стаде. Тогда братья выручили $a^2=(k\cdot 10+\alpha)^2$ рублей за проданных баранов.

Это число a^2 по условию содержало нечетное число десятков. Но $a^2=k^2\cdot 10^2+2k\cdot 10\cdot\alpha+\alpha^2$. В сумме $k^2\cdot 10^2+2k\cdot 10\cdot\alpha$ четное число десятков. Значит, a^2 содержит нечетное число десятков, если α^2 содержит нечетное число десятков.

Ясно, что $\alpha>3$.

Но при $\alpha=4$ $\alpha^2=16$; при $\alpha=7$ $\alpha^2=49$;

при $\alpha=5$ $\alpha^2=25$; при $\alpha=8$ $\alpha^2=64$;

при $\alpha=6$ $\alpha^2=36$; при $\alpha=9$ $\alpha^2=81$.

Следовательно, α^2 содержит нечетное число десятков при $\alpha=4$ и $\alpha=6$. В обоих случаях число α^2 оканчивается цифрой 6. Значит, младшему брату не хватило до 10 р. (на последнем этапе деления денег) 4 р. Старший брат должен был компенсировать ему 2 р. Следовательно, нож стоил 2 р.

8.9. Так как по условию задачи только рубка двух голов одновременно приводит к их полной ликвидации, то нужно иметь четное число голов.

Рубка двух хвостов (из трех имеющихся) приводит к появлению одной головы. Это позволяет в последующем двумя ударами уничтожить четыре головы змея.

При этом останется один хвост. Тремя ударами этот хвост можно превратить в четыре хвоста. Еще двумя ударами четыре хвоста превратить в две головы и, наконец, последним ударом нужно уничтожить две головы.

Таким образом, все головы и хвосты можно срубить змею, сделав 9 ударов.

8.10. Так как $(42)^2=1764$, $(43)^2=1849$ и $(44)^2=1936$, то Карлу Теодору, жившему в XVIII веке, было 42 года в 1764 году, де Моргану, жившему в XIX столетии, было 43 года в 1849 году, а профессору, жившему (или живущему) в XX столетии, было 44 года в 1986 году.

8.11. Обозначим через n число страниц первой части доклада, а через m общее число страниц в докладе. Тогда число страниц второй части доклада равно $m-n$.

Используя формулу суммы p первых чисел натурального ряда

$$1+2+3+\ldots+p=\frac{p(p+1)}{2},$$

найдем сумму номеров страниц первой части доклада

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

и сумму номеров страниц второй части доклада

$$(n+1)+(n+2)+\ldots+m=n(m-n)+(1+2+3+\ldots+(m-n))=$$
$$=n(m-n)+\frac{(m-n)(m-n+1)}{2}=(m-n)\left(n+\frac{m-n+1}{2}\right)=$$
$$=\frac{(m-n)(m+n+1)}{2}=\frac{m(m+1)}{2}-\frac{n(n+1)}{2}.$$

По условию задачи найденные суммы равны, т. е.

$$\frac{n(n+1)}{2}=\frac{m(m+1)}{2}-\frac{n(n+1)}{2}, \text{ или } n(n+1)=\frac{m(m+1)}{2}.$$

Это равенство возможно, если число m или $m+1$ кратно 4 и при этом полупроизведение двух последовательных натуральных чисел m и $m+1$ должно быть равно произведению двух последовательных натуральных чисел n и $n+1$. Легко показать, что этому условию при $6\leqslant m\leqslant 100$ удовлетворяет единственное натуральное число $m=20$.

При этом $\frac{m(m+1)}{2}=\frac{20\cdot 21}{2}=10\cdot 21=14\cdot 15$.

Следовательно, $n=14$. Но тогда $m-n=20-14=6$.

Значит, сумма номеров первой части доклада

$$\frac{n(n+1)}{2}=\frac{14\cdot 15}{2}=105,$$

а сумма номеров второй части доклада равна

$$\frac{m\cdot(m+1)}{2}-\frac{n(n+1)}{2}=\frac{20\cdot 21}{2}-\frac{14\cdot 15}{2}=210-105=105.$$

8.12. Из условий задачи ясно, что кража кларнета произошла раньше, чем кража кораллов.

Обозначим через x и y возрасты Карла и Клары соответственно в истинный момент кражи кларнета, а через t промежуток времени между истинным моментом кражи кларнета и моментом кражи кораллов.

Очевидно, возрасты Карла и Клары в момент пропажи кораллов — $x+t$ и $y+t$. Из условий задачи следует:

$$\left.\begin{aligned} &x+t=2y,\\ &x=y+t,\\ &y+t=3(y-8).\end{aligned}\right|$$

Решение этой системы будет: $t=8$, $x=24$, $y=14$.

Значит, в момент пропажи кларнета Карлу было 24 года.

Литература

1. Депман И. Я. Первое знакомство с математической логикой.— Л.: Общество знания, 1965.
2. Цинман Л. Л. Логические задачи и алгебра высказываний // Квант.— 1971.— № 4.
3. Яглом И. М. Две игры со спичками // Квант.— 1971.— № 2.
4. Гарднер М. Математические головоломки и развлечения.— Мир, 1971.
5. Гарднер М. Математические досуги.— Мир, 1972.
6. Гарднер М. Математические новеллы.— Мир, 1974.
7. Болховитинов В. И., Колтовой Б. И., Лаговской И. К. Твое свободное время.— М.: Детская литература, 1975.
8. Кордемский Б. Спрятанная арифметика // Квант.— 1978.— № 3.
9. Орлов А. Ставь на минус! // Квант.—1977.— № 3.
10. Савин А. Камушки и шахматная доска // Квант.— 1982.— № 1.
11. Гутенмахер В. Л. Магистр Игры в гостях у «Кванта» // Квант.— 1983.— № 4.
12. Лихтарников Л. М. Логические задачи: Элементы математической логики.— Л.: ЛГПИ им. А. И. Герцена, 1976.
13. Лихтарников А. М. Волшебное зеркало мага // Квант.— 1994.— № 1.
14. Гречин Н. Психологический практикум: Дуэль мушкетеров // Наука и жизнь.— 1987.— № 9.