

П. С. АЛЕКСАНДРОВ



Н.И. ЛОБАЧЕВСКИЙ

великий русский
математик

Серия III
№ 3

Академик
П. С. АЛЕКСАНДРОВ

Н. И. ЛОБАЧЕВСКИЙ— великий русский математик

Стенограмма публичной лекции,
прочитанной в Центральном
лектории Общества в Москве

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ЗНАНИЕ»

«Жить, значит чувствовать, наслаждаться жизнью, чувствовать непрестанно новое, которое бы напоминало, что мы живем...

Будем же дорожить жизнью, покуда она не теряет своего достоинства. Пусть примеры в истории, истинное понятие о чести, любовь к отечеству, пробужденная в юных летах, дадут заранее то благородное направление страстям и ту силу, которые позволяют нам торжествовать над ужасом смерти». Эти слова Лобачевского сразу дают почувствовать и порыв, и силу, и движение, заключенные в его личности, в которой отвлеченная мысль уживалась с горячим чувством, суровое исполнение долга — со светлой жизнерадостностью, могучие взлеты творческого вдохновения — с целеустремленными усилиями воли, направленными на постоянное служение родной стране, ее просвещению, ее культуре, ее молодежи. Гениальный ученый, принадлежавший, лишь как немногие его собратья по науке, всему человечеству, он в то же время всегда, на всех путях своих, был борцом за русскую национальную культуру, každодневным строителем ее, не боявшимся трудов, тягот, обид и разочарований, неизбежных в его положении в тот «жестокий век», в котором протекала его деятельность.

Долгое время считалось, что Николай Иванович Лобачевский родился 22 октября (ст. стиля) 1793 года в Нижегородской губернии; однако новейшие исследования заставляют считать более вероятным, что он родился 1 декабря (20 ноября по ст. стилю) 1792 года и притом в самом Нижнем Новгороде. Отец Н. И. Лобачевского был мелким чиновником, выходцем из Западного края. Детство будущего великого геометра протекало в нужде и лишениях, особенно обострившихся после смерти отца (1797 г.). Лишь исключительной энергии своей матери, Прасковьи Александровны Лобачевской, мальчик был обязан поступлением в Казанскую гимназию, по окончании которой, в возрасте 15 лет, он был принят в Казанский университет, открывшийся в 1804 году. В стенах этого университета и протекала вся жизнь Лобачевского, с ранних юношеских лет до старости.

Говоря о гимназических годах Лобачевского, нельзя не вспомнить его учителя математики, Григория Ивановича Кар-

ташевского. Это был блестящий педагог и незаурядный человек, оказавший большое влияние на развитие математических способностей нашего великого геометра.

В университете Лобачевский учился у выдающегося профессора математики Бартельса и прекрасно овладел под его руководством математической наукой своего времени главным образом по первоисточникам, по классическим трудам Гаусса и Лапласа.

Выдающиеся математические способности студента Лобачевского проявились рано: уже в 1809 году, когда ему не было еще полных 17 лет, он получил очень лестный отзыв при избрании в так называемые «камерные студенты» — этим именем называли студентов, имевших отличные успехи и избравшихся своими же товарищами для наблюдения за занятиями и поведением всех вообще студентов. Однако в этом же отзыве, исходившем от университетского инспектора, уже имеются указания и на задорный, шаловливый характер молодого студента, в сущности еще мальчика. Своему живому, непоседливому характеру Лобачевский-студент обязан многими бедами, обрушившимися на его голову. Так, в августе 1808 года Лобачевский был посажен в карцер за пускание ракеты в 11 часов вечера.

Однако не только мальчишеские шалости, вроде пускания ракет или катания верхом на корове (было и это!), ставились в вину юноше Лобачевскому. Рапорт субинспектора Кондырева отмечает в июле 1811 года: «Мечтательное о себе сомнение, упорство, неповиновение... и отчасти возмутительные поступки, оказывая которые в значительной степени явил признаки безбожия». Попечитель учебного округа Румовский, крупный для своего времени астроном, ученик Ломоносова и Эйлера, пишет ректору университета: «А студенту Лобачевскому объявить о том, что он отличные свои способности портит несоответствующим поведением».

В июле 1811 года по постановлению совета университета Лобачевский, очевидно, «за худое поведение» не удостоивается звания кандидата, но уже на следующем заседании совета возводится прямо в степень магистра (утвержден в этой степени 15 (3) августа 1811 года). Такое постановление совет вынес только потому, что блестящие способности и блестящие научные успехи Лобачевского в это время сделались настолько общеизвестными, что не считаться с ними далее, несмотря на все его юношеские проказы, стало невозможным. В это же время Бартельс пишет восторженное письмо о Лобачевском попечителю Румовскому; это письмо даже вызвало благодарность Лобачевскому со стороны министра народного просвещения «за особые успехи, засвидетельствованные профессором Бартельсом». Наконец, всё в это же время, Бартельс привлекает Лобачевского к педагогической работе со студентами

на правах своего, так сказать, частного ассистента: «...сверх того, господин Лобачевский будет разъяснять слушателям его, господина профессора, чего они недоразумевают».

За частной ассистентурой у Бартельса не замедлило последовать и начало официальной педагогической деятельности Лобачевского. Оно относится к 1812 году, т. е. к двадцатому году жизни Лобачевского, и скромно выразилось в курсах арифметики и геометрии для готовившихся к экзамену «начин» (так назывался экзамен, который должен был сдать не получивший достаточного школьного образования мелкий чиновник, чтобы иметь возможность дальнейшего продвижения по служебной лестнице). Однако дальнейшая университетская карьера молодого Лобачевского развивается стремительно. В 1814 году он производится в адъюнкты и в 1814/15 учебном году ведет серьезное университетское преподавание: читает лекции по теории чисел, следуя классическим работам Гаусса и Лежандра. Тот же курс продолжает он и в следующем году. В 1816/17 году он читает в университете курсы алгебры и геометрии «по собственным тетрадям», т. е. не следуя никакому определенному источнику. Эти лекции представляют для нас особый интерес, так как в них Лобачевский, повидимому, вплотную подошел к вопросу, решение которого составило славу всей его жизни, — к вопросу об эвклидовой аксиоме параллельных. Несмотря на то, что Лобачевский подошел к этому вопросу вначале вполне традиционно, стремясь, подобно своим предшественникам, доказать знаменитый пятый постулат Эвклида, надо считать, что именно в эту пору, т. е. когда Лобачевскому было 23—24 года, возникли первые его геометрические идеи, приведшие великого математика через несколько лет к открытию неевклидовой геометрии. Но об этом после.

Как уже было сказано, Лобачевский с 1814 года читает лекции в университете. В 1816 году он становится экстраординарным профессором (ординарным профессором он стал в 1822 году). Через два года начинается и административно-организационная деятельность, продолжавшаяся в течение трех десятилетий его жизни. В эти годы над Казанским университетом нависают черные тучи: наступает пора, известная под названием «эпохи Магницкого» — по имени знаменитого своим мракобесием попечителя Казанского учебного округа. Магницкий приехал в Казань в 1819 году в качестве ревизора с правами попечителя округа. Ознакомившись с университетским преподаванием, стоявшим тогда, надо сказать, на большой высоте, он подал министру докладную записку, в которой предлагал — университет закрыть и даже самое его здание уничтожить! Проект этот показался чрезмерным даже реакционному министерству и утвержден не был; Магницкий же получил место попечителя Казанского учебного округа. С июня 1819 года в течение семи лет он

управлял округом, пока не был устранен в связи со скандальными обстоятельствами (денежные растраты и т. п.).

Свои первые шаги на университетском поприще Лобачевский должен был делать именно в это мрачное время. Понятны те трудности, которые ему пришлось преодолевать, и поразительна та энергия, с какою он взялся за работу. А брался он за всякую работу, которая могла поднять университет как научный, образовательный и вообще культурный центр. Одно лишь перечисление различных должностей, которые Лобачевский последовательно, а иногда и одновременно занимал в университете, дает уже представление о размахе его деятельности. В конце 1820 года он становится деканом физико-математического факультета. Одновременно он берет на себя заботы по приведению в порядок совершенно запущенной университетской библиотеки и тратит на это дело опломные силы и очень много времени. Профессорская его деятельность в это же время получает новое содержание: в связи с отъездом профессора Симонова в кругосветное путешествие Лобачевскому в течение двух лет приходится читать физику и астрономию. С 1822 года на Лобачевского ложатся обязанности члена, а потом и председателя строительного комитета по ремонту старых и возведению новых зданий Казанского университета. Руководство строительством поручается известному архитектору М. П. Коринфскому; он же приглашается для преподавания архитектуры в университете (с 1837 г.). Без ущерба для своей основной научной и педагогической работы Лобачевский находит силы, время и интерес, чтобы с горячностью отдаться новым задачам. Он изучает строительное дело и искусство архитектуры, участвует в составлении технических и архитектурных проектов зданий.

В 1827 году Лобачевский избирается ректором университета и занимает этот пост 19 лет. Свои ректорские обязанности он понимает очень широко — от идейного руководства всей жизнью учебного заведения до вхождения во все мелочи повседневных нужд университета. Любопытная деталь: сделавшись ректором, Лобачевский еще в течение нескольких лет продолжает нести обязанности университетского библиотекаря и оставляет их лишь после того, как ставит библиотеку университета на должную высоту. В качестве примера огромной энергии и распорядительности Лобачевского можно упомянуть о тех быстрых и активных мероприятиях, которые он принял во время страшной холерной эпидемии 1830 года для ограждения студентов и университетского персонала от заражения этой грозной болезнью. Энергичные мероприятия Лобачевского увенчались полным успехом: эпидемия, свирепствовавшая во всем городе, пощадила университет.

Однако центральной точкой приложения усилий и талантов Лобачевского как ректора университета были его прямые

заботы о воспитании юношества в самом широком смысле слова. Постоянно руководя приемными экзаменами, Лобачевский прекрасно знал, с какими знаниями гимназист приходил в университет. Интересуясь всем развитием молодого человека (включая и физическое воспитание) от детского до позднего юношеского возраста, Лобачевский требовал от воспитания многого. Его идеал человеческой личности был очень высок. Он сурово порицает молодых людей, идеалы которых не идут далее удачно сделанной карьеры и обеспеченного места по службе. Он требует от молодого человека способности широко откликаться на всё, что есть волнующего в мире, в человеке, в человеческом творчестве; он считал, что в университете нет места тем жалким себялюбцам, для которых, говоря словами Тютчева,

...и солнцы, зная, не дышат,
И жизни нет в морских волнах.

Горячим протестом против этого мертвого, холодного, себялюбивого отношения к жизни полны следующие вдохновенные слова Лобачевского, произнесенные им в его знаменитой, актовой речи «О важнейших предметах воспитания»:

«Но вы, которых существование несправедливый случай обратил в тяжелый налог другим, вы, которых ум оступел и чувство заглохло... Для вас мертва природа, чужды красоты поэзии, лишена прелести и великолепия архитектура, незанимательна история веков. Я утешаюсь мыслию, что из нашего университета не выдут подобные произведения растительной природы; даже не войдут сюда, если к несчастью уже родились с таким назначением. Не выдут, повторяю, потому что здесь продолжается любовь славы, чувство чести и внутреннего достоинства».

Что понимал Лобачевский под чувством славы? Думаю, что чувство реальности тех объективных ценностей, которые переживают отдельную человеческую личность и переходят в наследие, оставляемое каждым человеческим поколением следующим за ним поколениям, сознание того вклада, который каждый человек должен внести в сокровищницу своего народа, своей страны, всего человечества. Этот вклад может быть мал или велик, но он должен быть внесен каждым членом общества, и он-то является источником того чувства нравственного удовлетворения, без которого человеческая жизнь не может, повторяя слова того же Лобачевского, не потерять «своего достоинства».

Лобачевский был не только профессором, блестяще и тщательно читавшим свои лекции, но и человеком, знавшим прямую дорогу к юношескому сердцу, умевшим во всех случаях, когда это требовалось, найти те самые нужные слова, которые способны подействовать на сбившегося с пути студента, вернуть его к работе, дисциплинировать его. Авторитет Лоба-

чевского в студенческой (да и в профессорской) среде был очень высок. Студенты любили его, несмотря на строгость его как профессора, особенно как экзаменатора, несмотря на горячность, а иногда и резкость Лобачевского-ректора.

Лобачевский — один из самых крупных университетских деятелей, выдвинутых славной двухсотлетней историей наших университетов. Гениальный ученый, он придал высоким званиям профессора и ректора университета такую полноту содержания, которая никем не была превзойдена.

Тем более трагическое впечатление производит то грубое, оскорбительное отстранение его от работы в университете, которым правительство императора Николая I отплатило великому русскому ученому за почти двадцатилетнее несение им не за страх, а за совесть трудных и сложных обязанностей руководителя Казанского университета. 26 (14) августа 1846 года Лобачевский, без всякого с его стороны желания и вопреки ходатайству совета университета, был уволен от должности ректора. Почти одновременно произошло и освобождение Лобачевского от его профессорских обязанностей, так что с весны 1847 года Лобачевский оказался фактически отстраненным от всякой работы в университете. Вполне понятно, что великий ученый, воспринимавший огромную деятельность в университете как большую и незаменимую часть своей жизни, воспринял отставку как тяжелый, непоправимый удар. К этому удару присоединились еще и другие тяжелые несчастья: умер любимый сын Лобачевского, взрослый юноша. С этой утратой Лобачевский уже никогда не смог примириться. Его здоровье стало быстро идти на убыль. Еще не достигнув шестидесяти лет, он имел вид старика. Его зрение стало резко ухудшаться, и в конце концов он ослеп совершенно. Свое последнее произведение, «Пангеометрию», Лобачевский должен был диктовать. 24 (12) февраля 1856 года смерть прекратила это догорание великого человека.

* * *

В чем же научные заслуги Лобачевского, заставляющие нас видеть в нем одного из величайших геометров всех времен?

Для того чтобы ответить на этот вопрос, надо прежде всего заметить, что в сознании всех математиков до Лобачевского, как и в сознании далеко стоящих от математики людей и в настоящее время, присутствовало и присутствует неизбежное убеждение, что наша обычная, изучаемая в школе геометрия является единственной математически мыслимой теорией пространства. По этим взглядам, нераздельно господствовавшим в геометрии до Лобачевского, всякая система предложений, касающаяся объектов элементарной геометрии (точек, прямых, плоскостей) и содержащая утверждения, проти-

воречащие каким-нибудь из изучаемых в школе геометрических теорем, представляет собой ошибочную, математически бессмысленную теорию.

Лобачевский опроверг это, казалось бы, совершенно бесспорное убеждение: он фактически построил геометрию, теоремы которой во многих случаях резко отличаются от знакомых нам из школьного курса геометрических теорем, противоречат им, и, несмотря на это, новая, построенная Лобачевским неевклидова геометрия не содержит никакого противоречия в себе, а является безошибочной математической теорией, в которой все доказательства правильны и безупречны. Итак, неверным является мнение, что евклидова, или, как ее называл Лобачевский, «употребительная», геометрия является единственной математически мыслимой геометрией; напротив, математически мыслимыми, в себе непротиворечивыми являются не одна, а по крайней мере две различные геометрии. Вот тот факт, который, несмотря на всю его парадоксальность, с непреложной убедительностью обнаружил Лобачевский. Спрашивается: как он к нему пришел и как можно преодолеть кажущуюся нелепость этого факта?

Как известно, геометрия представляет собой классический пример так называемой дедуктивной науки. Это значит следующее. Среди понятий, которые встречаются в геометрии, некоторые принимаются без определения. Таковы понятия точки, прямой, плоскости. Некоторые отношения между этими понятиями также принимаются без определения. Примером может служить отношение принадлежности точки прямой, выражаемое словами: «данная точка лежит на данной прямой», или, что мы считаем равнозначным, «данная прямая проходит через данную точку». Дальнейшие понятия уже определяются, т. е. выражаются через основные, принятые без определения, понятия. Так, например, мы определяем угол как пару прямых, имеющих общую точку, и т. п.

Однако одного перечисления геометрических понятий и отношений, как элементарных, принимаемых без определения, так и определяемых, еще недостаточно для построения геометрии: нужны еще аксиомы, т. е. принимаемые без доказательства утверждения, касающиеся основных геометрических понятий и отношений. Примерами аксиом могут служить утверждения: «Через всякие две различные точки проходит одна, и только одна, прямая». «Из трех точек, лежащих на данной прямой, одна, и только одна, лежит между двумя другими» (эта аксиома выражает одно из основных свойств элементарного, т. е. вводимого без определения, понятия «между»).

После того как введены основные понятия геометрии и сформулированы геометрические аксиомы, всё остальное построение геометрии производится уже с помощью одних только логических выводов (дедукций); все утверждения геомет-

рии, не высказанные без доказательства в качестве аксиом, называются, как известно, теоремами и до к а з ы в а ю т с я, т. е. выводятся из аксиом, посредством более или менее длительной цепи умозаключений (силлогизмов).

Такова, в общих чертах, структура геометрии как дедуктивной науки. Заметим, что наличие основных, не подвергающихся никаким определениям отправных понятий, так же как и наличие принимаемых без доказательства утверждений (аксиом), является необходимой составной частью всякой дедуктивной науки. В самом деле, всякое определение заключается в сведении определяемого понятия к другим понятиям, которые мы считаем уже данными, точно так же как всякое доказательство состоит в сведении доказываемого утверждения к более простым утверждениям или определениям, считающимся уже известными. Естественно, что этот процесс сведения, редукции, не может продолжаться безгранично и должен привести к понятиям и утверждениям, которые ни к каким более простым уже не сводятся. Эти первоначальные понятия и аксиомы можно выбирать по-разному, но обойтись без них нельзя.

Каковы же те утверждения, которые принимаются в геометрии в качестве аксиом? При наивном словоупотреблении принято говорить, что аксиомы выражают собой «истины, столь очевидные, что они не нуждаются ни в каком доказательстве». Такое высказывание не выдерживает, конечно, строгой критики, хотя бы в силу неизбежно присущей ему субъективности, а также в силу того, что в математике имеется немало примеров, когда вещи, казавшиеся «очевидными», при более внимательном рассмотрении оказывались не только не очевидными, но даже просто неверными.

Однако некоторая доля правды в этом наивном подходе к аксиомам тем не менее есть: несмотря на элементы произвола, всегда имеющиеся при выборе тех утверждений, которые объявляются аксиомами, нельзя отрицать того, что любая система аксиом геометрии как бы подводит итоги наиболее элементарным данным многовекового опыта человека в познании пространства. Геометрия, как и всё наше познание, имеет своим источником опыт. Эти данные опыта, однако, в геометрии, как и вообще в математических науках, концентрируются только в аксиомах; всё дальнейшее построение каждой математической дисциплины происходит чисто логическим путем, без какого бы то ни было нового привлечения опытных данных.

Но, когда говорят об опыте как единственной основе аксиом геометрии, следует избегать грубого эмпиризма: нельзя думать, что каждая геометрическая аксиома может быть непосредственно проверена опытным путем. Ведь не следует забывать, что все геометрические понятия являются лишь и д е а

лизациями, а не непосредственными воспроизведениями данных нашего пространственного опыта. Такими идеализациями являются даже простейшие геометрические образы, например, прямая линия или точка. Мы все знаем, что геометрическая прямая бесконечна. Но разве может быть бесконечная протяженность непосредственно усмотрена нами в опыте? Ни геометрическая точка, ни геометрическая прямая в самом опыте нам не даны: геометрическая точка является идеализацией весьма малых физических тел, размеры которых нами уже не воспринимаются, точно так же как геометрическая прямая является идеализацией, с одной стороны, например, световых лучей, а с другой— весьма длинных и тонких твердых стержней или натянутых нитей.

Эти замечания о геометрических понятиях как идеализациях нашего пространственного опыта надо иметь в виду при рассмотрении вопроса об опытной проверке геометрических аксиом. Вопрос этот получил актуальность в связи с аксиомой параллельных Эвклида.

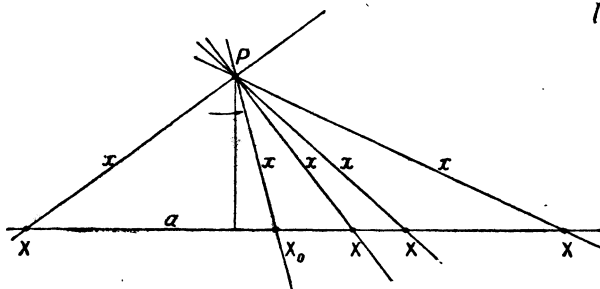
Эта аксиома, известная также под названием пятого постулата Эвклида, гласит: к данной прямой можно через данную, не лежащую на этой прямой точку провести лишь одну параллельную прямую.

В течение свыше 2 тысяч лет, отделяющих Эвклида (III век до н. э.) от Лобачевского, эта аксиома не переставала привлекать к себе внимание геометров, потративших много труда и творческой энергии на попытки ее доказать, т. е. вывести из совокупности остальных аксиом геометрии. Все эти попытки кончались неудачей,— вопрос об аксиоме параллельных был решен, как мы скоро увидим, в совершенно неожиданном смысле.

Но вернемся к возможностям опытной проверки аксиомы параллельных. Соображения, которые по этому поводу можно привести, сводятся приблизительно к следующему. Возьмем в данной плоскости Π вне данной прямой a точку P и проведем через нее прямую x . Пусть эта прямая пересекает нашу прямую a , положим, в точке X_0 (см. черт. 1). Будем вращать прямую x в плоскости Π , положим, против часовой стрелки. Эту переменную, вращающуюся прямую будем обозначать через x ; ее точку пересечения с неподвижной прямой a обозначим через X .

При вращении прямой x против часовой стрелки точка X будет скользить по прямой a , неограниченно удаляясь в направлении слева направо. При дальнейшем вращении прямой x ее точка пересечения с прямой a появится далеко налево от точки X_0 и всё будет ползти слева направо. Спрашивается: что происходит после того, как точка X уходит всё дальше направо, и до того, как она появится слева от точки X_0 ?

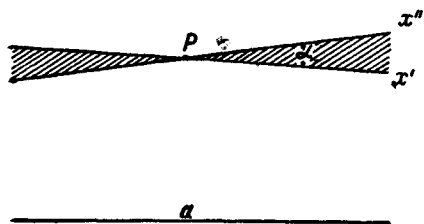
Аксиома параллельных дает на этот вопрос ответ, заключающийся в том, что наступает единственный момент, в который прямая x вовсе не пересекает прямую a , т. е. становится параллельной прямой a . Это положение и отделяет (при вращении прямой x против часовой стрелки, отправляясь от начального положения PX_0) те моменты, когда вращающаяся



Черт. 1

прямая x пересекает прямую a в точках, лежащих справа от X_0 , от моментов, когда точка X лежит слева от X_0 .

Но почему не может случиться, что вращающаяся прямая x , достигнув положения x' , в котором она впервые не пересекает прямой a , продолжает ее не пересекать, пока мы ее вращаем в пределах некоторого угла α (см. черт. 2)?



Черт. 2

В этом случае, только повернув прямую x от положения x' на угол, больший α , мы начнем получать точки пересечения слева от точки X_0 . Если бы осуществилась эта вторая возможность, то это и значило бы, что евклидова аксиома параллельных неверна: тогда все прямые, проходящие через точку P и расположенные внутри за-

штрихованной пары вертикальных углов раствора α не пересекали бы прямую a .

Никакой опыт не позволяет сделать выбор между только что высказанными двумя логическими возможностями. Для того чтобы убедиться, что данная прямая x не пересекает прямую a ни в какой ее точке, нам необходимо рассмотреть эту прямую во всей ее бесконечной протяженности, а этого мы ни в каком опыте сделать, конечно, не можем: нам могут быть доступны лишь более или менее длинные, но всегда конечные

«куски», т. е. отрезки данной прямой, а не вся эта прямая в целом.

Итак, непосредственная опытная проверка самой аксиомы параллельных не представляется осуществимой. Однако можно пытаться избрать, так сказать, окольный путь. Уже давно известно, что теорема о равенстве суммы углов всякого треугольника двум прямым является утверждением, равносильным аксиоме Эвклида: если верна эвклидова аксиома параллельных, то сумма углов треугольника равна двум прямым; если же эвклидова аксиома параллельных неверна, то сумма углов всякого треугольника меньше двух прямых. Следовательно, фактическое измерение суммы углов треугольников может решить вопрос об истинности аксиомы параллельных.

Такие измерения были сделаны многократно. И никогда не получалось результата, который бы давал сколько-нибудь чувствительное (т. е. выходящее за пределы допустимых погрешностей измерения) отклонение от двух прямых углов.

Какой же вывод мы из этого должны сделать? Тот, что наша обычная, эвклидова геометрия при осуществимой в настоящее время точности измерений является вполне удовлетворительной идеализацией доступных нашему измерению пространственных отношений. Слова «доступных нашему измерению» следует подчеркнуть. Дело в том, что как бы ни были совершенны наши измерительные и наблюдательные приборы, им доступна только ничтожная часть бесконечной Вселенной.

Совершенно не исключена возможность, что в треугольниках космических масштабов (например, масштаба большего, чем вся наша Галактика) сумма углов дает чувствительное отклонение от двух прямых, и эта возможность не находится ни в каком противоречии с тем, что во всех треугольниках, имеющих масштабы, доступные нашему измерению, отклонение суммы углов от двух прямых настолько ничтожно, что не улавливается даже самыми точными инструментами.

Короче говоря, вполне оценивая всю важность того факта, что в «малых», т. е. охватываемых нашими приборами, частях Вселенной эвклидова геометрия достаточно хорошо передает реальные пространственные отношения, мы тем не менее совершенно не вправе делать вывод, что теоремы эвклидовой геометрии наилучшим образом выражают геометрическую структуру всего мирового пространства в целом или даже только, так сказать, «галактических» объемов этого пространства (последняя оговорка существенна, так как «всё мировое пространство в целом» столь же мало доступно нашему опыту, как и, скажем, любая прямая во всей ее бесконечной протяженности).

Мы во всяком случае должны сказать, что никакой экспе-

римент не может нас убедить в истинности эвклидовой аксиомы параллельных как универсального закона природы, характеризующего геометрическую структуру мирового пространства. Современная физика, подчеркивая необходимость во всех рассуждениях, связанных с «экспериментальной проверкой» каких бы то ни было утверждений, строго ограничиваться только высказываниями, самый предмет которых не выходит за контролируемые опытом пределы, конечно, лишь усиливает полученный нами отрицательный вывод. С другой стороны, современные физические теории придают этому отрицательному выводу и некоторое вполне положительное содержание, апеллируя самым деловым образом к геометрическим системам, отличным от эвклидовой геометрии. Но к этому вопросу мы еще вернемся.

Разочаровавшись в возможности экспериментального доказательства аксиомы параллельных, мы, естественно, возвращаемся к вопросу о ее математическом доказательстве, т. е. к вопросу о возможности логически вывести пятый постулат Эвклида из совокупности остальных аксиом геометрии. С этого вопроса начал и Лобачевский. Подобно своим многочисленным предшественникам Лобачевский начал с попытки доказать аксиому параллельных от противного: сделав противоположное этой аксиоме допущение, что к данной прямой через данную точку можно провести по крайней мере две параллельные прямые, Лобачевский стремился привести это предположение к противоречию.

Однако, по мере того как он развивал из сделанного им допущения и совокупности остальных аксиом эвклидовой геометрии всё более и более длинную цепь следствий, ему становилось ясным, что никакого противоречия не только не получается, но и не может получиться.

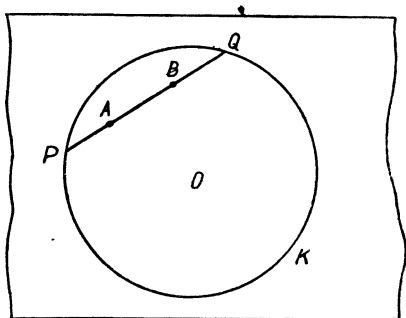
Вместо противоречия Лобачевский получил хотя и своеобразную, но логически совершенно стройную и безупречную систему предложений, систему, обладающую тем же логическим совершенством, что и обычная, эвклидова, геометрия.

Таким образом, была построена новая геометрия, дедуктивная теория, исходящая из тех же основных понятий, определений и аксиом, что и эвклидова геометрия, с единственным, но, конечно, совершенно фундаментальным исключением, заключающимся в том, что в этой геометрии эвклидова аксиома параллельных заменена противоположным ей утверждением — аксиомой Лобачевского: к данной прямой через данную, не принадлежащую ей точку можно провести по крайней мере две параллельные прямые.

Эта новая геометрия носит название неэвклидовой геомет-

рии, или геометрии Лобачевского¹. Свое логическое право на существование в качестве математической теории неевклидова геометрия получает вследствие своей непротиворечивости. Более подробно можно сказать: существует система математических объектов, которые, будучи названы соответственно точками и прямыми, удовлетворяют всем аксиомам геометрии Лобачевского. Каждая такая система объектов называется моделью геометрии Лобачевского. Одна из первых моделей геометрии Лобачевского была построена знаменитым немецким математиком Клейном (1849—1925).

Модель Клейна строится следующим образом. Рассмотрим в обыкновенной плоскости круг K радиуса 1 (черт. 3) и установим следующий «словарь»: внутренность круга K назовем плоскостью Лобачевского; точки, лежащие внутри круга K , будем именовать «точками» плоскости Лобачевского; «прямыми» плоскости Лобачевского назовем хорды круга K (концы хорды к хорде не причисляются, так что наши «прямые» оказываются, как и должно быть, неограниченными — на «прямой» нет ни самой правой, ни самой левой точки).



Черт. 3

Если взять полный перечень аксиом евклидовой геометрии², то легко проверить, что все аксиомы взаимного расположения точек и прямых (так называемые аксиомы соединения и порядка) оказываются верными для наших «точек» и «прямых»: через всякие две «точки» можно провести одну, и только одну, «прямую», порядок расположения точек на любой из наших «прямых» в точности такой же, как и на обыкновенных евклидовых прямых, и т. д.

Дальнейшие аксиомы геометрии касаются понятия равенства (или конгруэнтности) отрезков и углов. Для того чтобы применить эти понятия к «плоскости» Лобачевского, достаточно указать правила для измерения отрезков и углов, причем, ко-

¹ К тем же выводам, что и Лобачевский, пришел и великий венгерский геометр Бояи. Оба геометра сделали свое открытие независимо друг от друга и примерно в одно и то же время, поэтому построенную ими неевклидову геометрию называют геометрией Лобачевского—Бояи. Следует всё же отметить, что система неевклидовой геометрии разработана у Лобачевского более полным и совершенным образом, чем у Бояи.

² Этот перечень дан, например, в книге П. С. Александрова «Что такое неевклидова геометрия», изд-во Академии педагогических наук, 1950, а также в любом учебнике оснований геометрии или высшей геометрии.

нечно, установить эти правила надо так, чтобы соответствующие аксиомы геометрии оказались выполненными. Поставленная цель достигается следующим образом.

Возьмем на нашей «прямой» PQ «отрезок» AB (черт. 3) и рассмотрим выражение

$$\frac{PA}{AQ} : \frac{PB}{BQ}.$$

в котором все отрезки, конечно, берутся с учетом их направления. Это так называемое двойное (или ангармоническое) отношение четырех точек P, Q, A, B и обозначается оно через $(PQAB)$.

При помощи самых простых вычислений легко проверить следующие свойства двойного отношения:

1. Если точки A и B расположены, как на нашем чертеже, между точками P и Q , то двойное отношение $(PQAB)$ всегда положительно.

2. Если, идя от P к Q , мы сначала встречаем A , а потом B , то $(PQAB)$ меньше единицы, в противном случае — больше единицы.

3. Если в двойном отношении $PQAB$ поменять местами P и Q или A и B , то численная величина двойного отношения изменится на обратную величину, т. е.

$$(QPAV) = \frac{1}{(PQAB)}, \quad (PQBA) = \frac{1}{(PQAB)}.$$

4. Для всякой точки C на отрезке AB имеем:

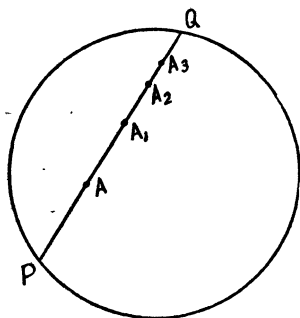
$$(PQAC) \cdot (PQCB) = (PQAB)$$

Согласимся теперь называть длиной отрезка AB на «прямой» PQ «плоскости» Лобачевского взятый со знаком минус логарифм двойного отношения $(PQAB)$. Знак минус здесь берется для того, чтобы длина оказалась положительной, если точки A, B идут в направлении от P к Q . Тогда из свойства 2 сразу следует, что длина отрезка меняет знак при изменении направления отрезка, а из свойства 3 вытекает самое основное свойство длины, а именно: если на отрезке AB взять точку C , то длина AB равна сумме длин отрезков AC и CB . Вы видите, таким образом, что наше определение длины вовсе не так искусственно, как оно может показаться с первого взгляда. Более глубокие геометрические соображения, на которых я здесь не могу останавливаться, делают его даже в высшей степени естественным.

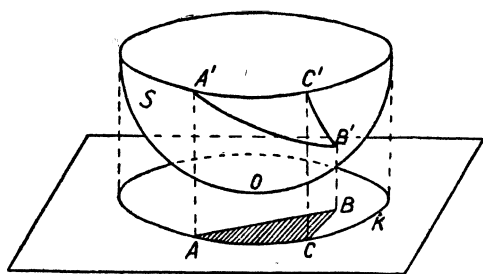
Очень важным для понимания существа дела является следующее замечание. Если на «прямой» PQ взять последовательно точки $A, A_1, A_2, A_3 \dots A_n \dots$ и т. д. до бесконечности, так, чтобы отрезки $AA_1, A_1A_2, A_2A_3 \dots$ все были между собой конгруэнтны, т. е. имели бы в только что установленном смысле одну и ту же длину, то точки $A, A_1, A_2, A_3 \dots A_n \dots$ будут непре-

менно располагаться так как это указано на черт. 4, т. е. в смысле обычного, евклидова расстояния будут неограниченно приближаться к точке Q (или к точке P). Таким образом, на «прямой» Лобачевского возможно неограниченное число раз откладывать один и тот же отрезок, так же как и на обыкновенной, евклидовой прямой. Другими словами, «прямая» Лобачевского является неограниченной в обе стороны не только в том смысле, что у нее, как и у евклидовой прямой, нет самой правой и самой левой точки, но и в том смысле, что, при введенном нами правиле измерения отрезков, на прямой можно в любую сторону от данной точки неограниченно откладывать один и тот же заданный отрезок, никогда не дойдя при этом ни до какого «конца», но перейдя при этом за любую наперед заданную точку этой прямой (выполнена так называемая аксиома Архимеда).

Установим теперь правило измерения углов на «плоскости» Лобачевского. Величиною угла ABC на «плоскости» Лобачевского мы назовем обычную величину угла, построенного следующим образом (черт. 5). Берем сферу S радиуса 1, касающуюся



Черт. 4

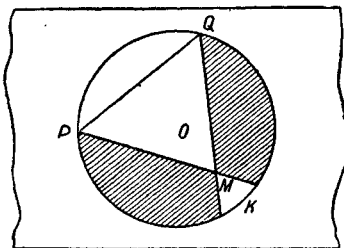


Черт. 5

ся плоскости круга K в центре O этого круга. Спроектируем отрезки BA и BC на сферу, т. е. возьмем дуги $B'A'$ и $B'C'$, в которых сфера пересекут плоскости, проведенные через BA и BC перпендикулярно к плоскости круга K . Угол $A'B'C'$ между дугами $B'A'$ и $B'C'$, т. е. угол между касательными к дугам $B'A'$ и $B'C'$ в точке B' , и принимается за меру угла ABC на «плоскости» Лобачевского.

Вот и весь наш «словарь». Установив правила измерения отрезков и углов на «плоскости» Лобачевского, мы можем ввести понятие о равенстве фигур. Например, два треугольника называются равными, если стороны и углы одного треугольника соответственно равны сторонам и углам другого. Оказывается, что и аксиомы евклидовой геометрии, касающиеся равенства (конгруэнтности) отрезков, углов и треугольников, полностью выполнены на нашей «плоскости».

Вообще можно убедиться в том, что все аксиомы эвклидовой геометрии, кроме одной лишь аксиомы параллельных, удовлетворяются на «плоскости» Лобачевского. Что же касается аксиомы параллельных, то достаточно взглянуть на черт. 6, чтобы увидеть, что через точку M к прямой PQ можно провести две параллельные PM и QM и что всякая «прямая», проходящая через точку M и лежащая внутри заштрихованной пары вертикальных углов, не имеет с прямой PQ ни одной общей точки. Таким образом, на «плоскости» Лобачевского аксиома параллельных Эвклида заменена аксиомой Лобачевского, так что оказываются выполненными все аксиомы геометрии Лобачевского. Нами действительно построена модель геометрии Лобачевского.



Черт. 6

Чему же учит сделанное построение? Тому, что с помощью нашего «словаря» всякое предложение геометрии Лобачевского переходит в некоторое предложение обыкновенной эвклидовой геометрии, только под «точками» надо понимать точки, лежащие внутри круга K , а под «прямыми» — хорды этого круга. Поэтому если бы в геометрии Лобачевского было какое-нибудь утверждение, содержащее противоречие, то, переводя это утверждение при помощи нашего «словаря» в соответствующее утверждение геометрии Эвклида, мы немедленно обнаружили бы противоречие и в этой последней. А так как в эвклидовой геометрии противоречия нет, то нет его и в геометрии Лобачевского. Построение геометрии Лобачевского раз навсегда решило двухтысячелетнюю проблему пятого постулата; решение это заключается в том, что пятый постулат Эвклида никогда и никаким методом не может быть доказан, т. е. выведен из совокупности остальных аксиом эвклидовой геометрии.

В самом деле, если бы эвклидова аксиома параллельных могла быть выведена из совокупности остальных аксиом геометрии, то, принимая эту совокупность и дополняя ее аксиомой Лобачевского, т. е. утверждением, противоположным аксиоме Эвклида, мы должны бы получить противоречие, между тем, как мы только что видели, такого противоречия не получается.

Однако, как бы ни было важно только что приведенное решение проблемы пятого постулата, им далеко не исчерпывается значение великого научного подвига Лобачевского в математике и во всем точном знании, достигнутом человечеством. Недаром знаменитый английский математик Клиффорд назвал Лобачевского «Коперником геометрии»: подобно тому, как Копер-

ническое учение заменило геоцентрическое, так геометрия Лобачевского заменила геометрию Эвклида. Это было не просто изменение точки зрения, это было открытие новой области истины. Лобачевский показал, что можно строить геометрии, которые не противостоят эвклидовой, но существуют независимо от нее. Это было великое открытие, которое изменило представление о том, что такое геометрия.

ник разрушил догму о неподвижной Земле, составляющей якобы неизблемый центр мироздания, так Лобачевский разрушил догму «неподвижной, единственно истинной» эвклидовой геометрии.

После создания неевклидовой геометрии не могло оставаться сомнений в том, что предмет геометрии не есть наивное познание окружающего нас физического пространства. Геометрия изучает все вообще «идеальные» математические «пространства», которые отвлекаются от эмпирического пространства, от непосредственных данных опыта и измерений нашей теоретической, абстрагирующей мыслью. Каждое из этих идеальных «пространств» представляет собой некоторую систему математических объектов, удовлетворяющую своей системе аксиом. Совокупность следствий, которые можно вывести из этих аксиом, составляет соответствующую «геометрию», т. е. математическую теорию данного математического «пространства».

«В противоположность идеальным математическим пространствам свойства реального физического пространства известны нам только приближенно. В соответствии с этим не имеет смысла вопрос о том, какая из различных идеальных «геометрий» (например, геометрия Эвклида или Лобачевского. — П. А.), рассматриваемых чистой математикой, окончательно и с полной точностью отражает свойства реального пространства. Осмыслен же только вопрос о том, какие из идеальных математических геометрий удовлетворительно отражают наши познания об устройстве реального пространства, имеющиеся на данный момент. Ответ на этот последний вопрос может меняться со временем и никогда не может стать вполне однозначным. Создание Лобачевским первой неевклидовой геометрии послужило исходным пунктом для выработки всей этой современной системы взглядов на соотношения между идеальными математическими «пространствами» и их «геометриями» и геометрией реального физического пространства»¹.

К этому можно еще прибавить следующее. Современные физические теории, в отличие от физики времен Ньютона, считают пространство, лишенное материи, не имеющим физического смысла. Более того: те или иные геометрические свойства физического пространства получает в зависимости от тех материальных масс, которые в нем действуют. «Пустое» пространство, пространство без материи, и его геометрические свойства являются математической абстракцией, а не предметом физического опыта. А раз так, то нет ничего удивительного в том, что сами свойства физического пространства, его геометрическая структура также зависят от распределения в нем материи.

¹ Статья А. Н. Колмогорова «Лобачевский и математическое мышление девятнадцатого века» в юбилейном сборнике «Н. И. Лобачевский», Гостехиздат. 1943.

Интересно отметить, что предтечей этих современных физико-геометрических идей опять-таки является Лобачевский. Вся геометрия теории относительности исходит из существования пространств различной геометрической структуры, пространств, в широком смысле слова неевклидовых и даже отличающихся от евклидова пространства гораздо больше, чем классическое пространство Лобачевского.

Существенным здесь является то, что математические пространства, вызванные к жизни общей теорией относительности,— это пространства искривлённые, или кривые многообразия. Они отличаются от обычного нашего трехмерного пространства наличием у них кривизны, так же как кривые поверхности, например сфера (шаровая поверхность), отличаются от плоскости.

С самого начала заметим, что кривизна поверхности может быть, так сказать, более или менее существенной. Например: и цилиндр и сфера — кривые поверхности, но если цилиндр разрезать по его образующей, то его можно развернуть на плоскость, причем при этом разворачивании мы не будем ни растягивать поверхность, ни сжимать ее, а только изгибать; все длины, все углы и площади при этом будут оставаться неизменными.

Отсюда, в частности, следует, что «геометрия на цилиндре» — это та же хорошо известная нам евклидова геометрия плоскости. Но только, конечно, на цилиндре осуществляется геометрия не всей плоскости в целом, а лишь кусков плоскости, которые при изгибании превращаются в куски цилиндрической поверхности без самоналожений.

Совсем иное дело — шаровая поверхность. Никакой кусок ее нельзя изогнуть в плоскую область. Если мы желаем сделать плоский диск из куска резинового мяча, то его необходимо подвергнуть при этом растяжениям и сжатиям, — одними изгибаниями тут не обойдешься. Поэтому из бумажного или жестяного шара плоского диска получить никак нельзя. Говорят, что шаровая поверхность обладает существенной, или внутренней, кривизной, тогда как цилиндрическая поверхность — это та же плоскость, но только изогнутая, свернутая в трубку.

Тем не менее, если рассматривать кусок сферической поверхности, то можно найти ряд свойств ее, аналогичных свойствам плоскости. Так, например, на сфере всякие две точки, не являющиеся диаметрально противоположными, можно соединить одной единственной кратчайшей линией — дугой большого круга, проходящей через эти две точки (точнее: наименьшей из двух дуг единственного проходящего через две данные точки большого круга). Таким образом, дуги большого круга на сфере аналогичны прямолинейным отрезкам на плоскости.

Оказывается, что и на других кривых поверхностях всякие две точки, если только они расположены достаточно близко

друг от друга, можно, и притом единственным образом, соединить некоторой кратчайшей дугой. Такие кратчайшие линии на кривых поверхностях называются геодезическими. На сфере ими, как уже сказано, являются дуги больших кругов, на цилиндре — прямолинейные образующие, дуги окружностей и винтовые линии.

На сфере треугольники, составленные из дуг больших кругов, так называемые сферические треугольники, совершенно аналогичны треугольникам на плоскости. В частности, для них верны все три случая равенства треугольников, изучаемые в школьном курсе геометрии. Но имеется и более глубокая аналогия: на сфере можно, так же как и на плоскости, совмещать равные фигуры посредством движения. Это связано с одним чрезвычайно замечательным свойством сферы как кривой поверхности, а именно с тем, что кривизна сферы везде одинакова. Любой кусок сферы поэтому можно двигать по сфере во всех направлениях совершенно так же, как кусок плоскости можно двигать по плоскости. Это свойство выражают, говоря, что сфера есть поверхность постоянной кривизны.

Плоскость есть тоже поверхность постоянной кривизны, но только кривизна плоскости равна нулю, тогда как кривизна сферы положительна и измеряется обратной величиной ее радиуса (чем радиус меньше, тем кривизна больше).

Спрашивается: не существуют ли другие поверхности постоянной кривизны, кроме сферы и плоскости? Оказывается, что существуют, — это так называемые поверхности постоянной отрицательной кривизны, или псевдосферические поверхности, примером которой может служить поверхность, имеющая вид граммофонного рупора. То, что кривизна поверхности отрицательна, означает, что никакой кусок этой поверхности нельзя положить на стол так, как, например, кусок сферы, т. е. чтобы поверхность касалась стола лишь в одной точке. Это объясняется тем, что поверхность отрицательной кривизны вблизи каждой своей точки имеет седлообразную форму. Но весьма замечательно, что на поверхностях постоянной отрицательной кривизны эта седлообразная изогнутость одинакова вблизи всех точек, так что кусок поверхности можно перемещать в разных направлениях по поверхности, не растягивая и не сжимая, а только, если нужно, изгибая его.

Таким образом, на поверхностях постоянной кривизны — и только на этих поверхностях — возможны движения во всех направлениях, тогда как, например, на эллипсоиде, все три оси которого различны, никакие движения, даже соединенные с изгибаниями, невозможны; на эллипсоиде вращения возможны лишь вращения вокруг одной оси, а не движения во всех направлениях.

Существование движений (связанных, вообще говоря, с изгибаниями) на поверхностях постоянной кривизны имеет своим

следствием то, что ряд теорем эвклидовой геометрии — а именно теоремы, касающиеся конгруэнтных фигур, — выполнен на всех поверхностях постоянной кривизны, если только вместо прямолинейных отрезков говорить о геодезических дугах. Любопытно отметить, что на всех этих поверхностях, кроме плоскости, мы имеем, кроме обычных случаев равенства треугольников, еще один случай, а именно: два треугольника равны, если три угла одного треугольника соответственно равны трем углам другого. Другими словами, ни на каких поверхностях, кроме плоскости (и переходящих в плоскость посредством изгибаения), не имеет место подобие фигур; единственные подобные фигуры — это равные между собою.

Естественно, возникает вопрос: как же обстоит дело на поверхностях постоянной кривизны с суммой углов треугольника? Вопрос этот получает совершенно точное решение: на поверхностях постоянной положительной кривизны (на сферах) сумма углов всякого треугольника больше двух прямых углов, а на поверхностях постоянной отрицательной кривизны сумма углов всякого треугольника меньше двух прямых.

Этот замечательный факт наводит на мысль о том, не осуществляется ли на поверхностях постоянной отрицательной кривизны неэвклидова геометрия Лобачевского, так же как на цилиндре осуществляется геометрия Эвклида? Оказывается, что так и есть, только с той же оговоркой, которую мы делали в свое время по поводу цилиндра: целиком всю плоскость Лобачевского осуществить в виде поверхности отрицательной кривизны, расположенной в обычном пространстве, нельзя, но куски плоскости Лобачевского со всем их геометрическим устройством, действительно, имеют своими моделями куски псевдосферы, если только считать дуги геодезических линий за прямолинейные отрезки. Таким образом, можно сказать, что геометрия Лобачевского есть геометрия поверхностей постоянной отрицательной кривизны.

Этот фундаментальный результат придает утверждению о действительном смысле геометрии Лобачевского новое и, так сказать, более реалистическое содержание, чем то, которое мы получали при построении специальной модели.

Таким же образом, как на цилиндре осуществляется эвклидова геометрия, а на псевдосфере осуществляется геометрия Лобачевского, так на кусках сферической поверхности осуществляется вторая неэвклидова геометрия, так называемая геометрия Риманна. В неэвклидовой геометрии Риманна параллельных линий нет совсем, и сумма углов всякого треугольника всегда больше двух прямых. Но в ней нарушаются и некоторые другие аксиомы эвклидовой геометрии, а не только одна аксиома параллельных. Так, например, в геометрии Риманна прямые суть замкнутые линии. Если же настаивать на сохранении всех аксиом эвклидовой геометрии, кроме аксиомы параллель-

ных, то единственными геометриями, которые мы получим, будут геометрии Эвклида и Лобачевского.

Теперь понятно, каким образом открытия Лобачевского подготовили геометрические идеи, являющиеся основой физики принципа относительности: геометрия общей теории относительности есть геометрия многообразий, имеющих кривизну, и притом разную в разных точках. Этой геометрии логически должна была предшествовать геометрия многообразий постоянной кривизны, и первой среди этих геометрий и была геометрия Лобачевского. Однако еще важнее то, что в геометрии Лобачевского основная идея абстрактного математического пространства, отличного от пространства эвклидовой геометрии, получила свое осуществление. Без этой идеи геометрические исследования нашего времени были бы невозможны, невозможен был бы и геометрический аппарат современной физики. Без открытий Лобачевского не могло бы быть и открытий Эйнштейна, не могло бы быть не только новой математики, но и новой теоретической физики.

* * *

Пушкин сказал когда-то, что вдохновение в геометрии нужно так же, как и в поэзии. Если поэт мыслит образами, то и геометру нужно бывает непосредственным усмотрением понять сущность тех закономерностей, которые он потом доказывает тончайшим логическим анализом всех представляющихся возможностей, кропотливым трудом, длительными усилиями. Без этих усилий вдохновение не слетает на геометра, как не слетает оно и на поэта.

«Вдохновения» в смысле чего-то, не зависящего от волевых усилий личности, вы не найдете в творчестве великих поэтов, музыкантов, ученых. Оно, и еще более разговоры о нем, всегда оставались уделом безнадежных дилетантов. Настоящее же вдохновение, то, которое является источником и необходимой составной частью творчества, есть не что иное, как сосредоточение всех сил данной человеческой личности на данном предмете. Только этим огромным сосредоточением сил — волевых, интеллектуальных, эмоциональных, т. е. всех сил, которыми располагает психика человека, — достигается творческий результат.

В великих людях, работавших в различных областях человеческого творчества, мы поражаемся, этой способности сосредоточения сил. И Пушкину, и Толстому, и Бетховену, и Чайковскому, и Гауссу, и Лобачевскому творческие озарения давались в результате колоссального труда, о котором свидетельствуют их черновики и записные книжки. Любопытная деталь: Лобачевский включил в свой фамильный герб изображение пчелы, как символ трудолюбия. Лобачевский оправдал этот

символ. Он всю жизнь работал и, как мы видели, работал не только над своими научными изысканиями, хотя, казалось бы, имел право считать, что может в своей жизни ничего, кроме них, не делать. Нет, он делал всё, что считал необходимым для того, чтобы своею жизнью внести наибольший возможный вклад и в науку и в культурную жизнь своей родины. Он делал всё, что надо было делать, и в своих действиях руководствовался не только своими творческими исканиями, но и самым простым, прямым чувством долга.

Вот почему образ Лобачевского живет и будет жить в сознании и нашего и грядущих поколений не только как образ великого ученого, но и как образ великого человека в самом подлинном, полном и волнующем смысле этого слова.

ЛИТЕРАТУРА

Лобачевский Н. И.—Полное собрание сочинений, т. 1—5. Гостехиздат. 1946—1951.

Александров П. С.—Что такое неевклидова геометрия. Изд-во АПН РСФСР. 1950.

Делоне Б. Н.—Краткое изложение доказательства непротиворечивости планиметрии Лобачевского. Изд-во АН СССР. 1953.

Ефимов Н. В.—Высшая геометрия. Гостехиздат. 1953.

Каган В. Ф.—Лобачевский и его геометрия. Гостехиздат. 1955.

Модзалевский Л. Б.—Материалы для биографии Н. И. Лобачевского. Изд-во АН СССР. 1948.

Норден А. П.—Элементарное введение в геометрию Лобачевского. Гостехиздат. 1953.

Автор

Павел Сергеевич Александров.

Редактор С. Е. Кипнис.

Техн. редактор П. Г. Ислентьева.

Корректор З. С. Патеревская.

А 00529. Подписано к печ. 28/1 1956 г. Тираж 78 500 экз. Изд. № 385. Бумага 60×92¹/₁₆—0,75 бум. л.=1,5 п. л. Учетно-изд. 1,58 л. Заказ № 3627.

Ордена Ленина типография газеты «Правда» имени И. В. Сталина,
Москва, ул. «Правды», 24.